

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za strojništvo



Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko




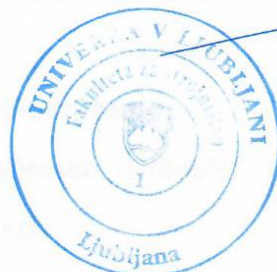
Analitični izračun povesa stekla

Partnerji: **Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo**
Laboratorij za numerično modeliranje in simulacije
Center za eksperimentalno mehaniko
Laboratorij za okoljske tehnologije v zgradbah
REFLEX Gornja Radgona d.o.o.
Zavod za gradbeništvo Slovenije
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

Oznaka ARRS projekta: L2-3172

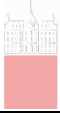
Naslov ARRS projekta: Razvoj tehničnih smernic za štirislojne zasteklitve


izr. prof. dr. Miroslav Halilovič
vodja projekta

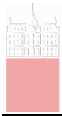



prof. dr. Mihael Sekavčnik
dekan UL FS

Ljubljana, november 2022

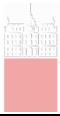


- Partnerji:**
- Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo (UL FS)
Laboratorij za numerično modeliranje in simulacije (LNMS)
Center za eksperimentalno mehaniko (CEM)
Laboratorij za okoljske tehnologije v zgradbah (LOTZ)
Aškerčeva 6
SI-1000 Ljubljana
- REFLEX Gornja Radgona d.o.o.
Podgrad 4
SI-9250 Gornja Radgona
- Zavod za gradbeništvo Slovenije (ZAG)
Dimičeva ulica 12
SI-1000 Ljubljana
- Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko
Jadranska ulica 19
SI-1000 Ljubljana
- Financiranje:** Projekt je finančno podprt s strani javne agencije za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ARRS (raziskovalni projekt L2-3172) in podjetja Reflex d.o.o.
- Oznaka ARRS projekta:** L2-3172
- Naslov ARRS projekta:** Razvoj tehničnih smernic za štirislojne zasteklitve
- Vodja projekta:** izr. prof. dr. Miroslav Halilovič
Tel.: (01) 4771 439
E-mail: miroslav.halilovic@fs.uni-lj.si
-
- Naslov poročila:** Analitični izračun povesa stekla
- Vodja aktivnosti:** izr. prof. dr. Miroslav Halilovič
- Avtorji:** **izr. prof. dr. Nikolaj Mole**
izr. prof. dr. Miroslav Halilovič
doc. dr. Pino Koc
Dejan Kovšca, mag. inž. str.
dr. Rok Markežič



Kazalo

1. Uvod	1
2. Opis dela	1
3. Analiza rezultatov	3
4. Zaključek	9
5. Reference.....	9



1. Uvod

V okviru ARRS projekta z naslovom **Razvoj tehničnih smernic za štirislojne zasteklitve** je bila opravljena raziskava analitičnega pristopa k izračunu geometrijske oblike stekla pod vplivom enakomerno porazdeljene enostranske obremenitve. Analitični izračun oblike bi omogočal izračun volumna v posamezni komori štirislojne zasteklitve različnih dimenzij in obremenitev. Določitev volumna posamezne komore je ključnega pomena za določitev nadtlaka v posamezni komori po plinski enačbi, ki predstavlja ključno obremenitev posameznega stekla v sestavu. Analitično izračunani maksimalni povese je bil primerjan z vrednostmi, izračunanimi po standardu EN 16612-2019 [1] za različne geometrije in obremenitve stekla.

2. Opis dela

V skladu s klasično teorijo upogiba tankih plošč [2], zasnovani na Von Karman-ovih enačbah, se v znanstveni literaturi obravnavajo različni pristopi k reševanju upogiba plošč, upoštevajoč velike povese le-teh [2-5]. Iz literature in lastnih izkušenj je znano, da pri velikih povasih tankih plošč, kamor sodijo tudi obravnavana stekla, membransko napetostno stanje bistveno vpliva na velikost povosov. Da je membransko napetostno stanje pravilno upoštevano v izračunu, mora izračun upoštevati ravnotežje na deformirani geometriji.

Popis razmer pri upogibu plošč, ki so po robu členkasto podprte, v primeru majhnih povosov

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

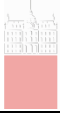
popisuje sledeča parcialna diferencialna enačba četrtega reda

v kateri predstavlja $w=w(x,y)$ povese plošče, q po plošči enakomerno razporejeno obtežbo in D predstavlja upogibno togost plošče, ki se izračuna z enačbo

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

V enačbi za izračun upogibne togosti plošče predstavlja E modul elastičnosti materiala iz katerega je izdelana plošča, h debelino plošče in ν Poissonov količnik.

Za primer velikih povosov je Von Karman parcialno diferencialno enačbo za majhne povese nadgradil z dodatnim členom, ki vključuje napetostno funkcijo $F=F(x,y)$



$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} + \frac{h}{D} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

Napetostna funkcija F predstavlja dodatno neznano funkcijsko veličino, zato je dodana parcialna diferencialna enačba drugega reda

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

katera izhaja iz ravnotežja na deformirani geometriji plošče.

V analitičnem reševanju dobljenega sistema parcialnih diferencialnih enačb upoštevamo robne pogoje, ki določeni v standardu [1]. Gre za členkasto podprte robove plošče.

Analitično reševanje dobljenega sistema parcialnih diferencialnih enačb bazira na razvoju iskanih funkcij $w(x,y)$ in $F(x,y)$ ter obremenitve $q(x,y)$ v dvojno trigonometrično vrsto

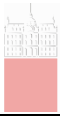
$$w = \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$F = \sum_{m=0,1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=0,1,2,\dots}^{\infty} f_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

$$q = \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Reševanje dobljenih trigonometričnih enačb zahteva uporabo naprednega orodja *Wolfram Mathematica* [6] za analitično reševanje matematično kompleksnih problemov.

V programskem okolju *Wolfram Mathematica* sistem nelinearnih enačb v odvisnosti od števila členov dvojne trigonometrične vrste zapišemo na naslednji način



$$\left\{ \pi^4 \text{Sum} \left[\left(\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 f_{m,n} \cos [m \pi x / a] \cos [n \pi y / b] \right), \{m, \theta, MM, 2\}, \{n, \theta, NN, 2\} \right] - \right. \\ \left. \text{EE} \left(\left(\left(\frac{\pi^2}{ab} \right) \text{Sum} [(r s w_{r,s} \cos [r \pi x / a] \cos [s \pi y / b]), \{r, 1, RR, 2\}, \{s, 1, SS, 2\}] \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left(\left(\frac{\pi^2}{a^2} \right) \text{Sum} [(r^2 w_{r,s} \sin [r \pi x / a] \sin [s \pi y / b]), \{r, 1, RR, 2\}, \{s, 1, SS, 2\}] \right) \right. \\ \left. \left. \left(\left(\frac{\pi^2}{b^2} \right) \text{Sum} [(s^2 w_{r,s} \sin [r \pi x / a] \sin [s \pi y / b]), \{r, 1, RR, 2\}, \{s, 1, SS, 2\}] \right) \right) \right) \right\}; \\ \text{TrigFactor}[\text{IZR}];$$

Po združitvi členov vrste, ki so pomnoženi z enako trigonometrično funkcijo, lahko celotni matematični zapis preuredimo tako, da dobimo nelinearni sistem enačb, v katerem so neznanke koeficienti w_{mn} dvojne trigonometrične vrste, ki aproksimativno popiše poves plošče. Sistem nelinearnih enačb lahko učinkovito generiramo in rešimo v programskem okolju *Wolfram Mathematica*

```
qAll = {};
For[r = 1, r ≤ RR, r = r + 2,
  For[s = 1, s ≤ SS, s = s + 2,
    qr,s = Coefficient[IZR, Sin[r π x / a] Sin[s π y / b]];
    qAll = Append[qAll, qr,s];
    (* Print["q",r,"",s," = ",qr,s]; *)
  ]
]
```

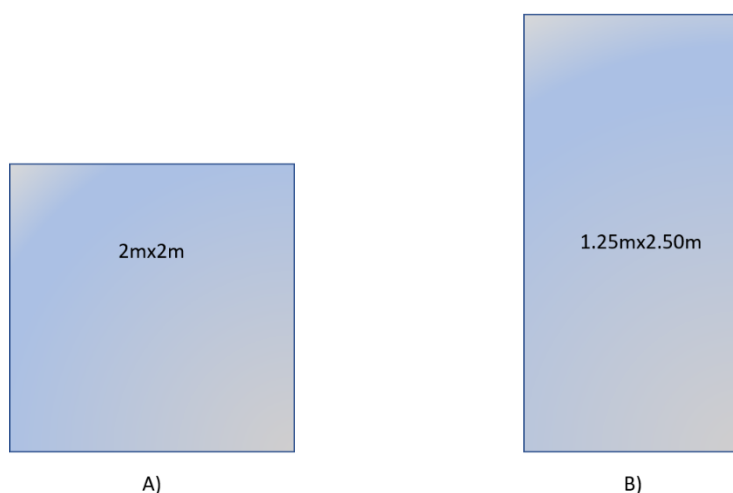
WW = FindRoot[Enacbe, Nez]

Ko so koeficienti dvojne trigonometrične vrste v enačbi za poves določeni, je poznana funkcijska odvisnost povesa $w(x,y)$ po celotnem območju plošče. Funkcijska odvisnost povesa nam omogoča izračun volumna, ki nastopa v plinski enačbi. Le-to moramo upoštevati v izračunu štirislojne zasteklitve, ker popisuje razmere v posamezni komori.

3. Analiza rezultatov

V analizi rezultatov smo primerjali analitično izračunane vrednosti z vrednostmi izračunanimi na osnovi standarda [1]. Na sliki 1 sta prikazani dve obravnavani geometriji stekel. V standardu [1] je obremenitev normirana tako, da lahko obravnavamo stekla različnih dimenzij. Brez dimenzijska obremenitev q^* zavisi od ploščine stekla A , njegove debeline h , Elastičnega modula E in porazdeljene obremenitve q po steklu

$$q^* = \left(\frac{A}{4h^2} \right)^2 \frac{q}{E} \quad .$$



Slika 1: Obravnavani geometriji stekel.

V tabeli 1 so podani analizirani primeri obremenitve stekla. V vseh primerih je bil upoštevan modul elastičnosti E velikosti 70GPa in Poissonov količnik ν velikosti 0,22. Analizirani sta bili dve obliki stekel in tri različne normirane obremenitve. Prva obremenitev ($q^*=1$) predstavlja primer majhnih povesov stekla, ko je maksimalni poves velikosti debeline stekla. Pri vrednosti $q^*=5$ je maksimalni vrednosti povesa dvakratnik debeline stekla. Pri taki obremenitvi se že pojavi vpliv membranskih napetosti v steklu. Tretja obremenitev ustreza vrednosti $q^*=100$, pri kateri so povesi stekla v območju velikih povesov (poves je velikostnega reda 10x debeline stekla).

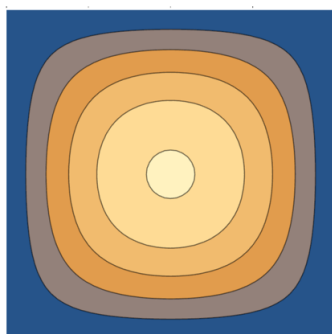
Tabela 1: Obravnavani primeri.

oznaka	širina stekla [mm]	višina stekla [mm]	debelina stekla h [mm]	normirana obremenitev q^* [1]	dejanska obremenitev q [kPa]
A1	2000	2000	8	1	0,287
A2	2000	2000	6	5	0,453
A3	2000	2000	4	100	1,792
B1	1250	2500	8	1	0,470
B2	1250	2500	6	5	0,743
B3	1250	2500	3	100	0,929

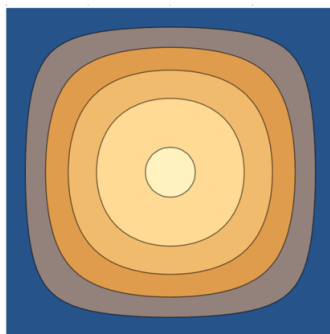
V tabeli 2 je podana primerjava analitično izračunanih vrednosti s programom *Wolfram Mathematica* in vrednostmi, izračunanimi na osnovi standarda [1]. Pri analitični rešitvi smo upoštevali od 4 do 16 členov dvojne trigonometrične vrste za aproksimativni zapis povesa. V območju majhnih povesov je ujemanje zelo dobro, v prehodnem območju pa se že pojavi odstopanje. Pri velikih povesih je razlika zelo velika, zato v takih primerih dobljena analitična rešitev ni primerna.

Tabela 2: Primerjava maksimalnih povosov med analitično rešitvijo in po standardu [1] izračunanih vrednosti.

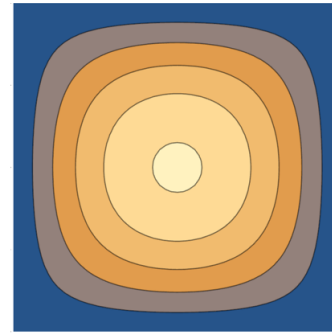
oznaka	standard [mm]	analitična rešitev 4 člani vrste [mm]	odstopanje od standarda [%]	analitična rešitev 9 členov vrste [mm]	odstopanje od standarda [%]	analitična rešitev 16 člani vrste [mm]	odstopanje od standarda [%]
A1	5,30	5,12	-3,4	5,13	-3,2	5,14	-3,0
A2	12,24	10,22	-16,5	10,26	-16,2	10,27	-16,1
A3	39,68	21,76	-45,2	22,1	-44,3	22,11	-44,3
B1	3,6	3,35	-6,9	3,36	-6,7	3,37	-6,4
B2	10,67	7,4	-30,6	7,54	-29,3	7,55	-29,2
B3	29,64	12,4	-58,2	13,38	-54,9	13,4	-54,8



A1 – 4 člani vrste

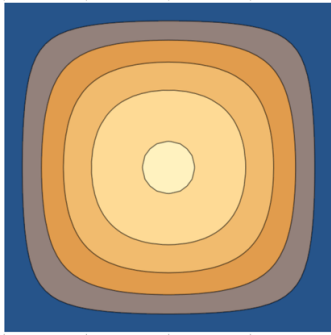


A1 – 9 členov vrste

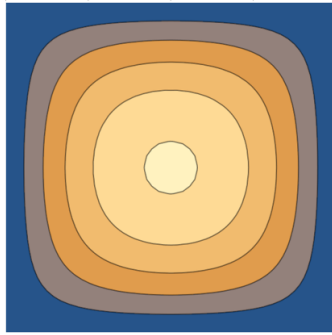


A1 – 16 členov vrste

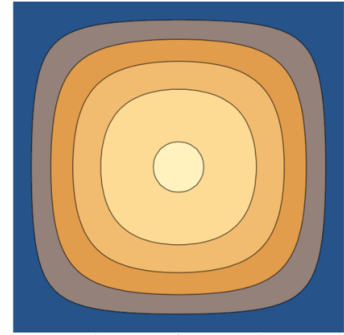
Slika 2: Prikaz polja povosov (A1).



A1 – 4 členi vrste

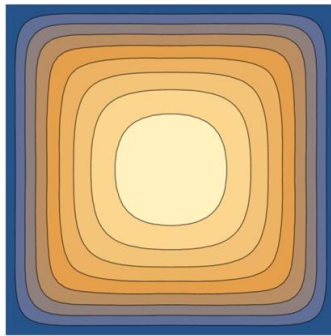


A1 – 9 členov vrste

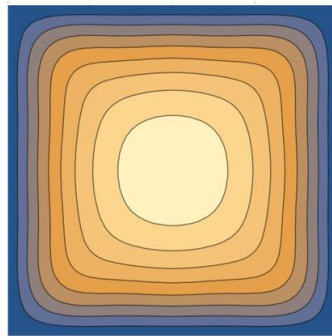


A1 – 16 členov vrste

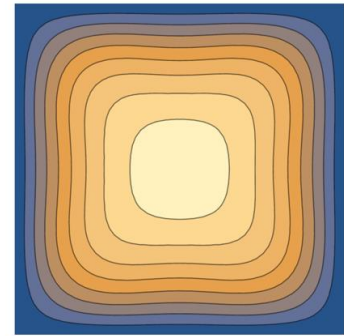
Slika 3: Prikaz polja povesov (A2).



A1 – 4 členi vrste

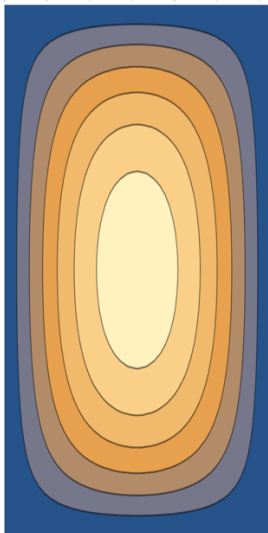


A1 – 9 členov vrste

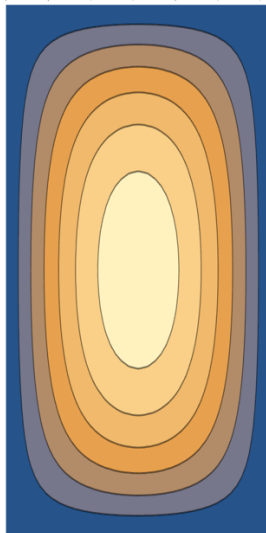


A1 – 16 členov vrste

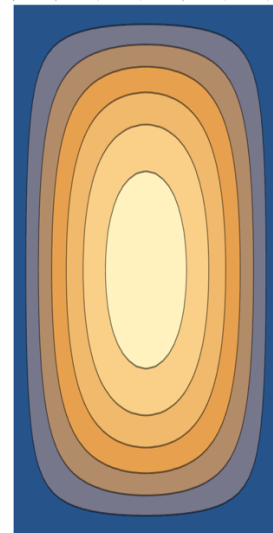
Slika 4: Prikaz polja povesov (A3).



A1 – 4 členi vrste

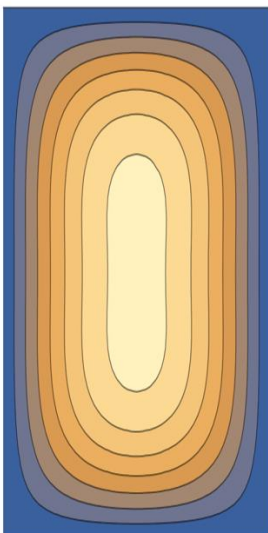


A1 – 9 členov vrste

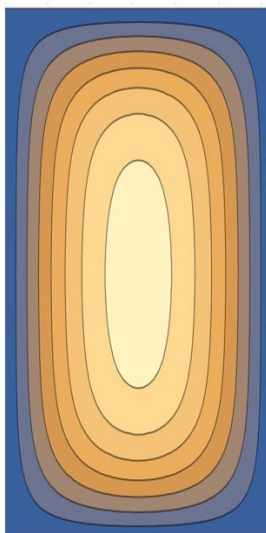


A1 – 16 členov vrste

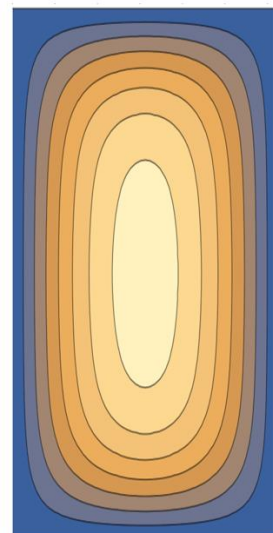
Slika 5: Prikaz polja povesov (B1).



A1 – 4 členi vrste

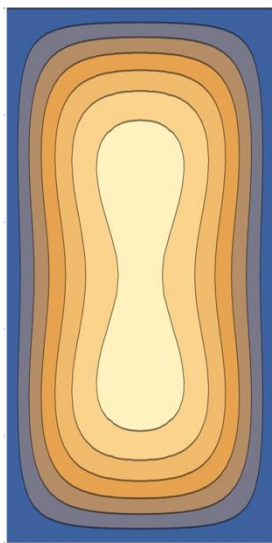


A1 – 9 členov vrste

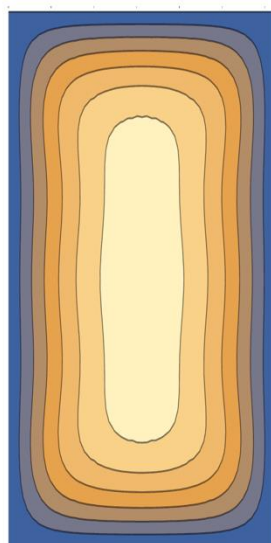


A1 – 16 členov vrste

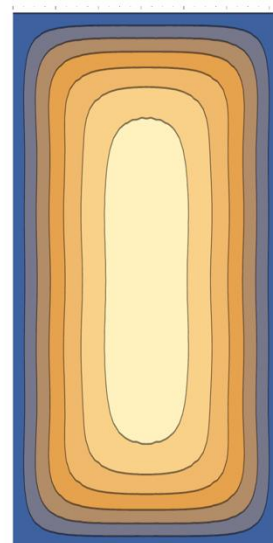
Slika 6: Prikaz polja povesov (B2).



A1 – 4 členi vrste



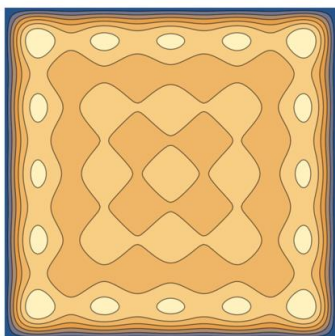
A1 – 9 členov vrste



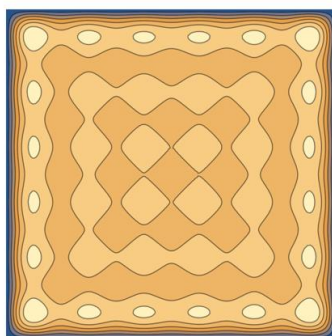
A1 – 16 členov vrste

Slika 7: Prikaz polja povsov (B3).

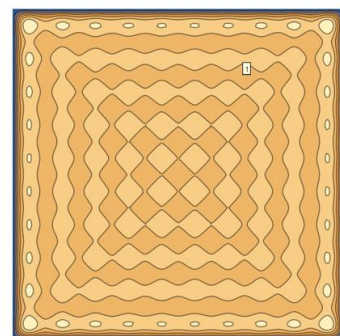
Da bi odkrili razlog za velika odstopanja med analitično izračunanimi vrednostmi in standardom [1], smo analizirali v analitičnem izračunu upoštevano obremenitev, ki je tudi popisana z dvojno trigonometrično vrsto. Na osnovi opravljene analize konstantnosti porazdelitve obremenitve po površini stekla smo ugotovili, da v tem ne tiči razlog za odstopanja (glej sliki 8 in 9).



A1 – 4 členi vrste

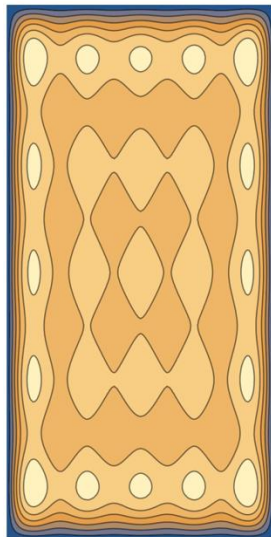


A1 – 9 členov vrste

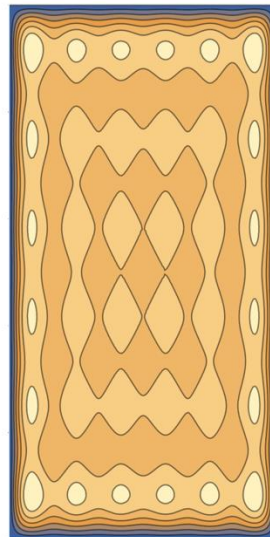


A1 – 16 členov vrste

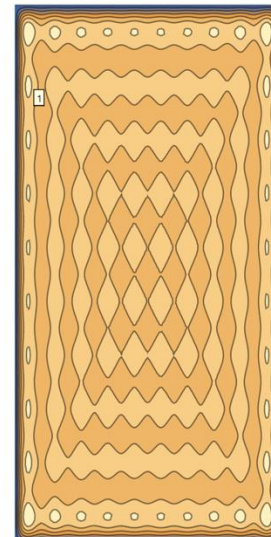
Slika 8: Prikaz porazdelitve obremenitve po površini stekla (A).



A1 – 4 členi vrste



A1 – 9 členov vrste



A1 – 16 členov vrste

Slika 9: Prikaz porazdelitve obremenitve po površini stekla (B).

4. Zaključek

Na osnovi opravljene analitične analize upogiba plošče, ki je členkasto podprta po robovih, izhajajoč iz v literaturi objavljenih pristopov, lahko zaključimo, da je taka rešitev primerna le v obremenitvenih primerih, ko maksimalni povese ne presega dvakratnika debeline stekla. Izhajajoč iz standarda [1], je to do brez dimenzijske obremenitve $q^* < 5$.

5. Reference

- [1] European Standard EN 16612 – Glass in building – Determination of the lateral load resistance of glass panes by calculation, oktober 2019
- [2] D.Wang, A.I.El-Sheikh: Large-deflection mathematical analysis of rectangular plates, J. of Engineering Mechanics, 2005
- [3] O. Askour, A. Tri, B. Braikat, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry: Von Karman equation of thin elastic plate by the ANM-MFS algorithm, 24 Congres Francais Mecanique, 2019
- [4] O.M. Ibearugbulem, J.C. Ezeh, U.C. Anya, C.P. Anyadiegwu: Simple and better approach to analysis of plates with large deflection, Int. J. of Science and Engineering Research, 2020
- [5] Q. Xu, Z. Yang, S. Ullah, Z. Jinghui, Y. Gao: Analytical bending solutions of orthotropic rectangular thin plates with two adjacent edges free and the others clamped or simply supported using finite integral transform method, Advances in Civil Engineering, 2020
- [6] Wolfram Mathematica 13.1, 2022