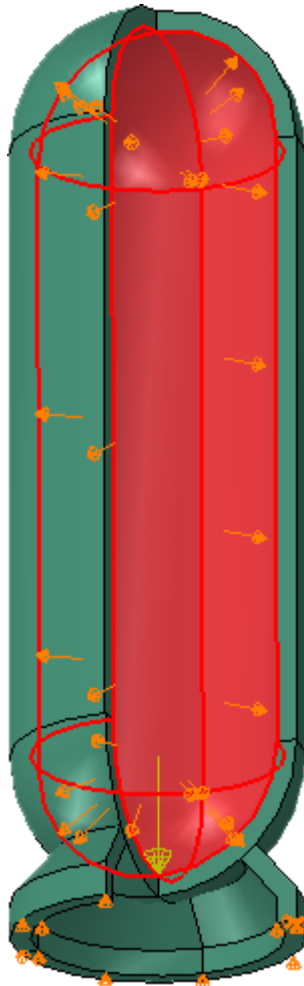
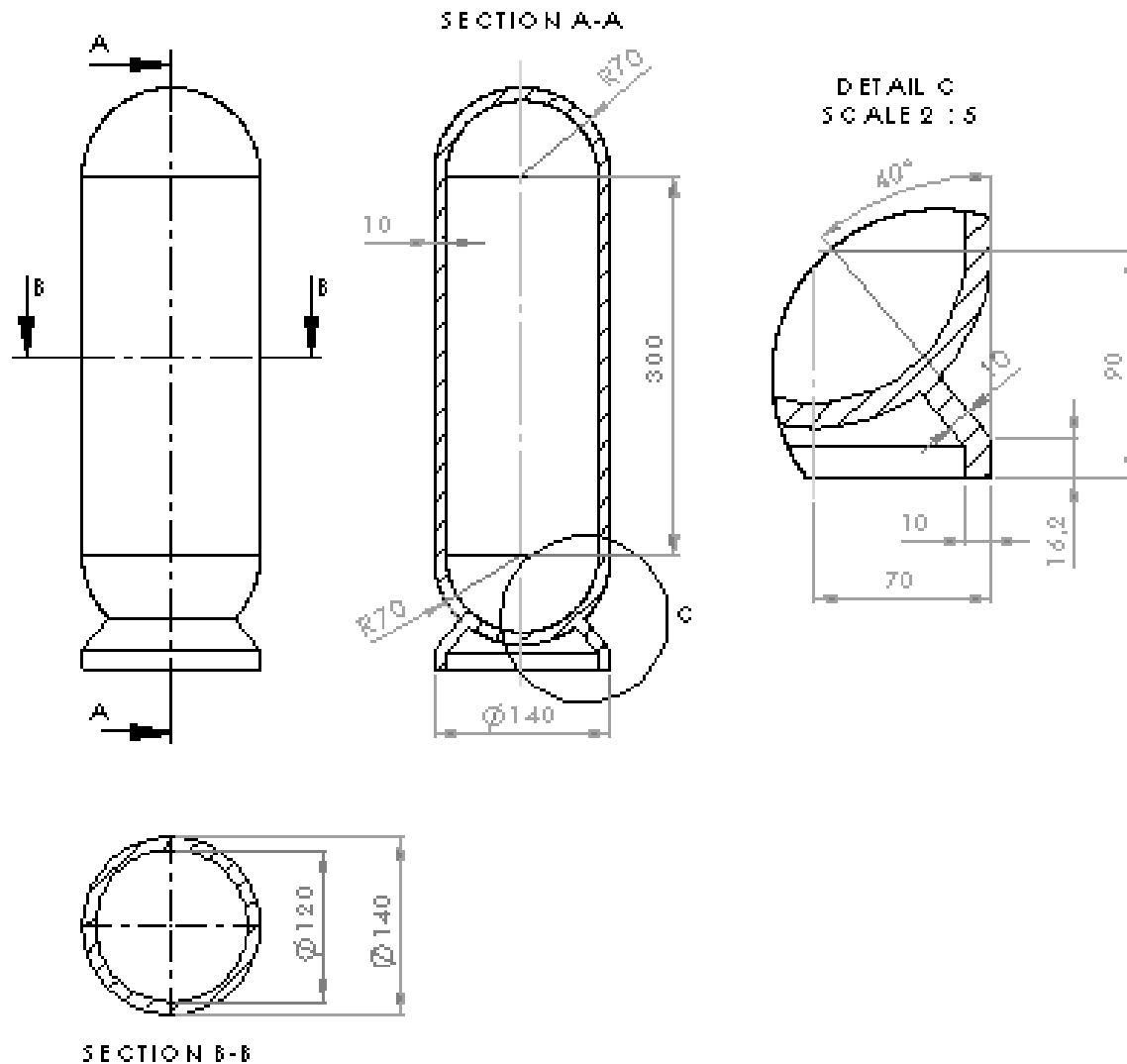


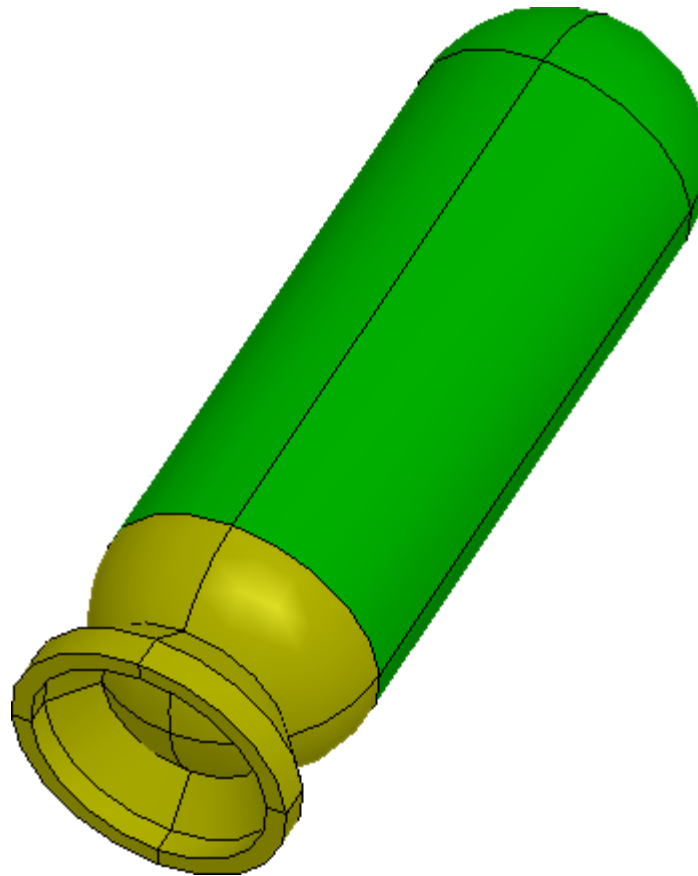
- primer reševanja volumskega mehanskega problema z MKE



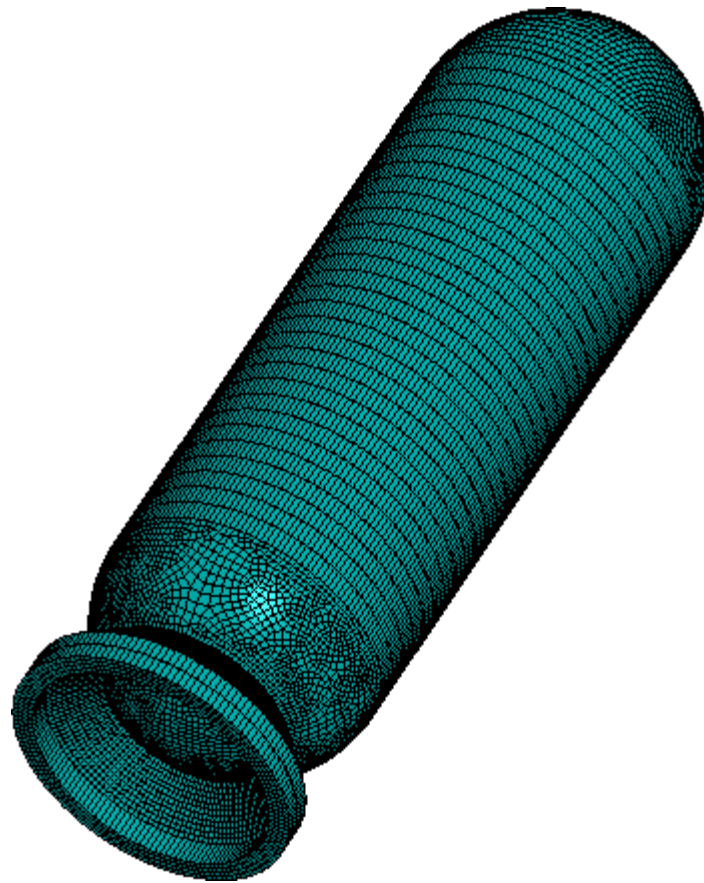
- primer reševanja volumskega mehanskega problema z MKE



- primer reševanja volumskega mehanskega problema z MKE



- primer reševanja volumskega mehanskega problema z MKE



- za homogeni, izotropni, linearno elastični material, zvezo med napetostmi in deformacijami, podanimi v Kartezijevem koordinatnem sistemu, zapišemo s Hookovim zakonom na sledeči način:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz}]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz}]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} + (1-\nu)\varepsilon_{zz}]$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{xz}$$

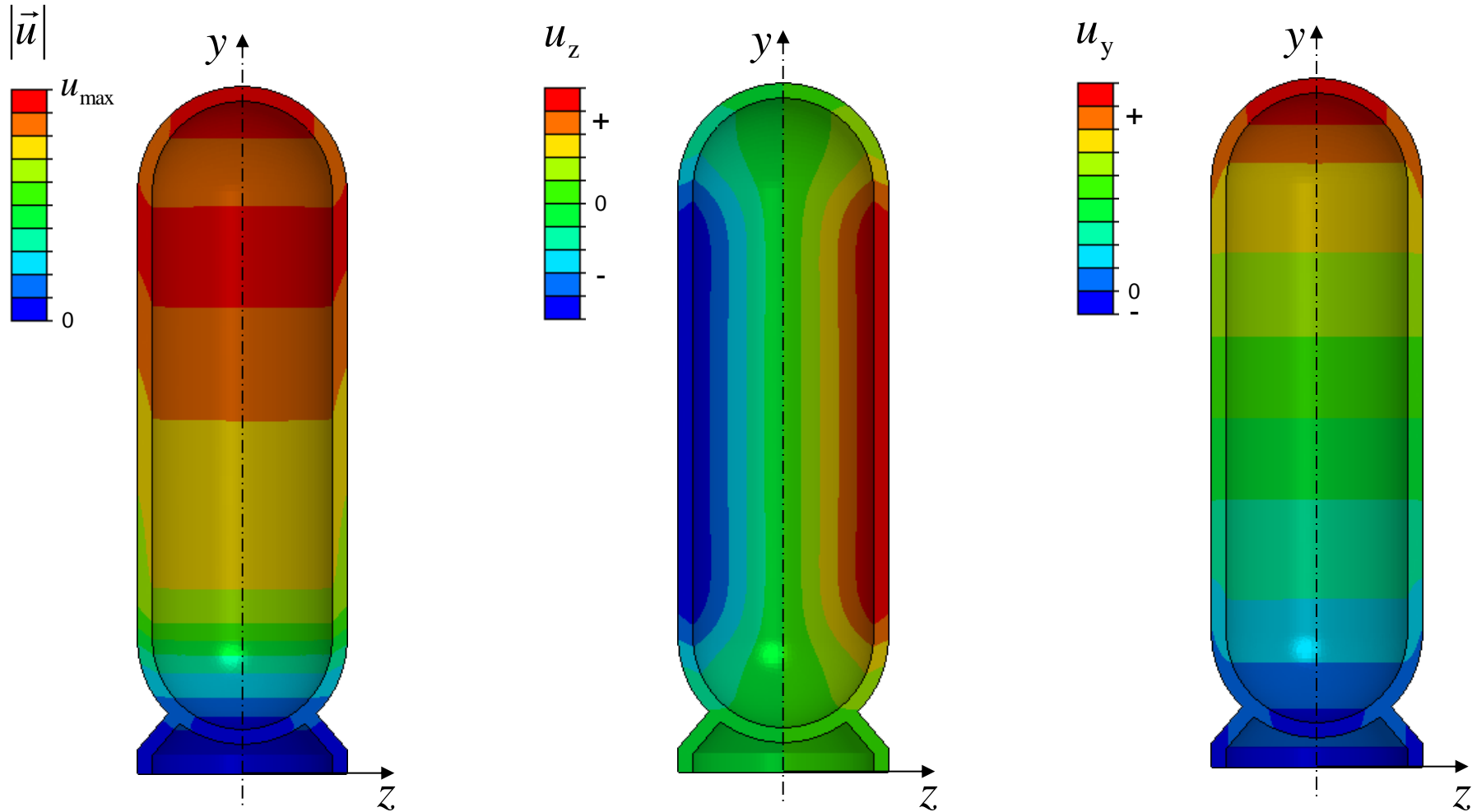
$$\sigma_{yz} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{yz}$$

- komponente deformacijskega tenzorja lahko v Kartezijevem koordinatnem sistemu zapišemo v odvisnosti od pomikov v obravnavanem območju

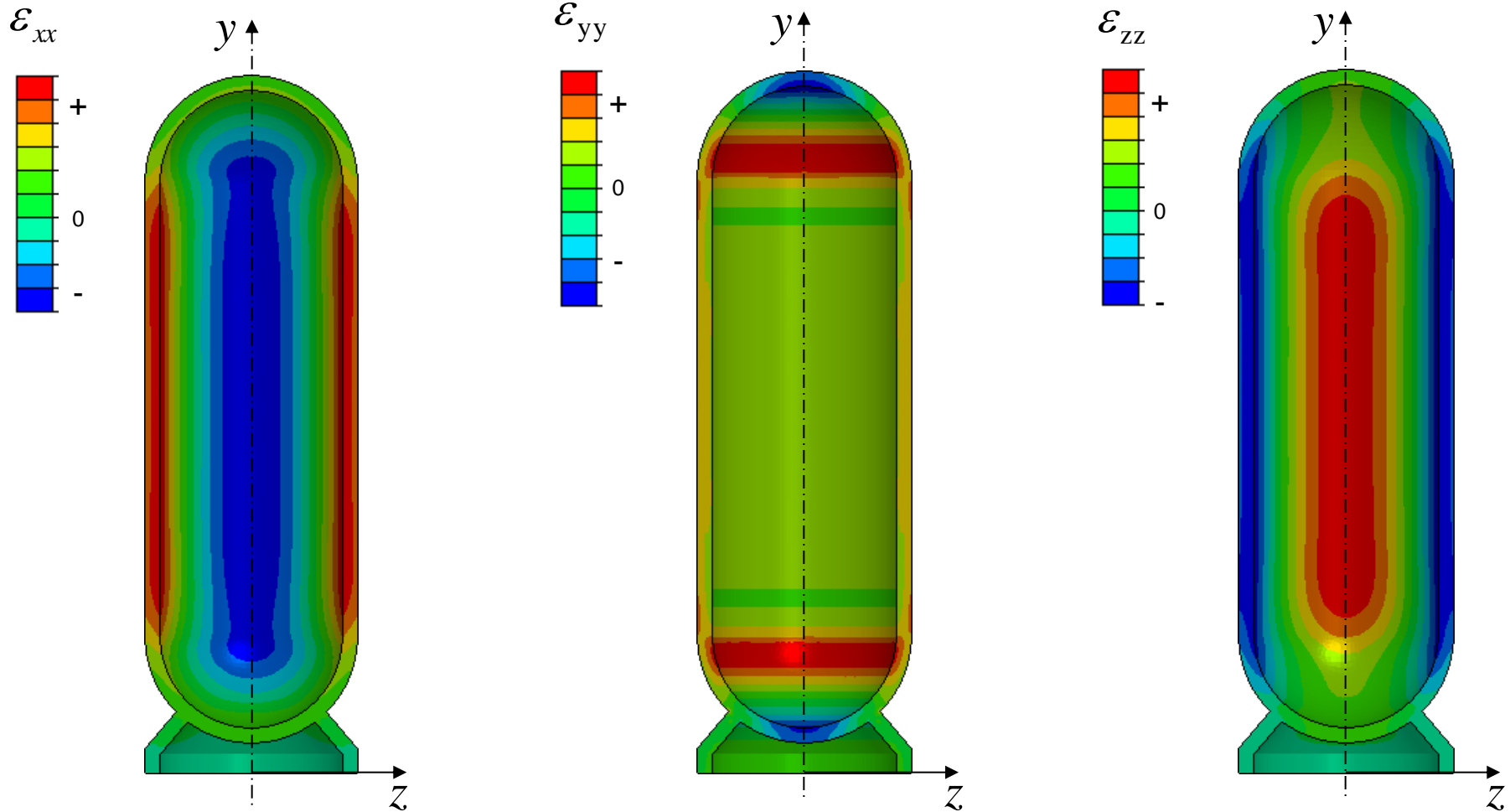
$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}$$

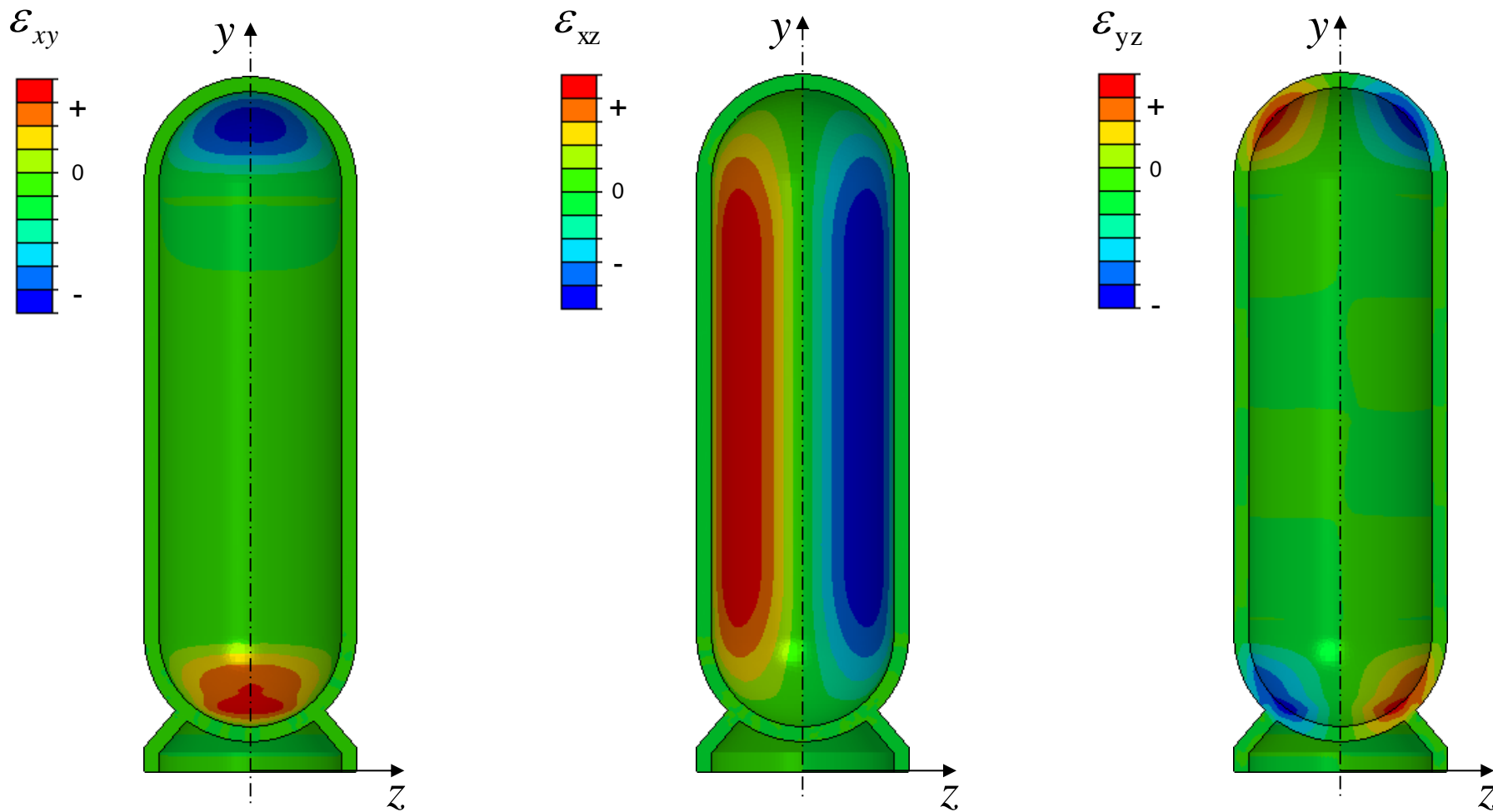
- pomiki v Kartezijevem koordinatnem sistemu



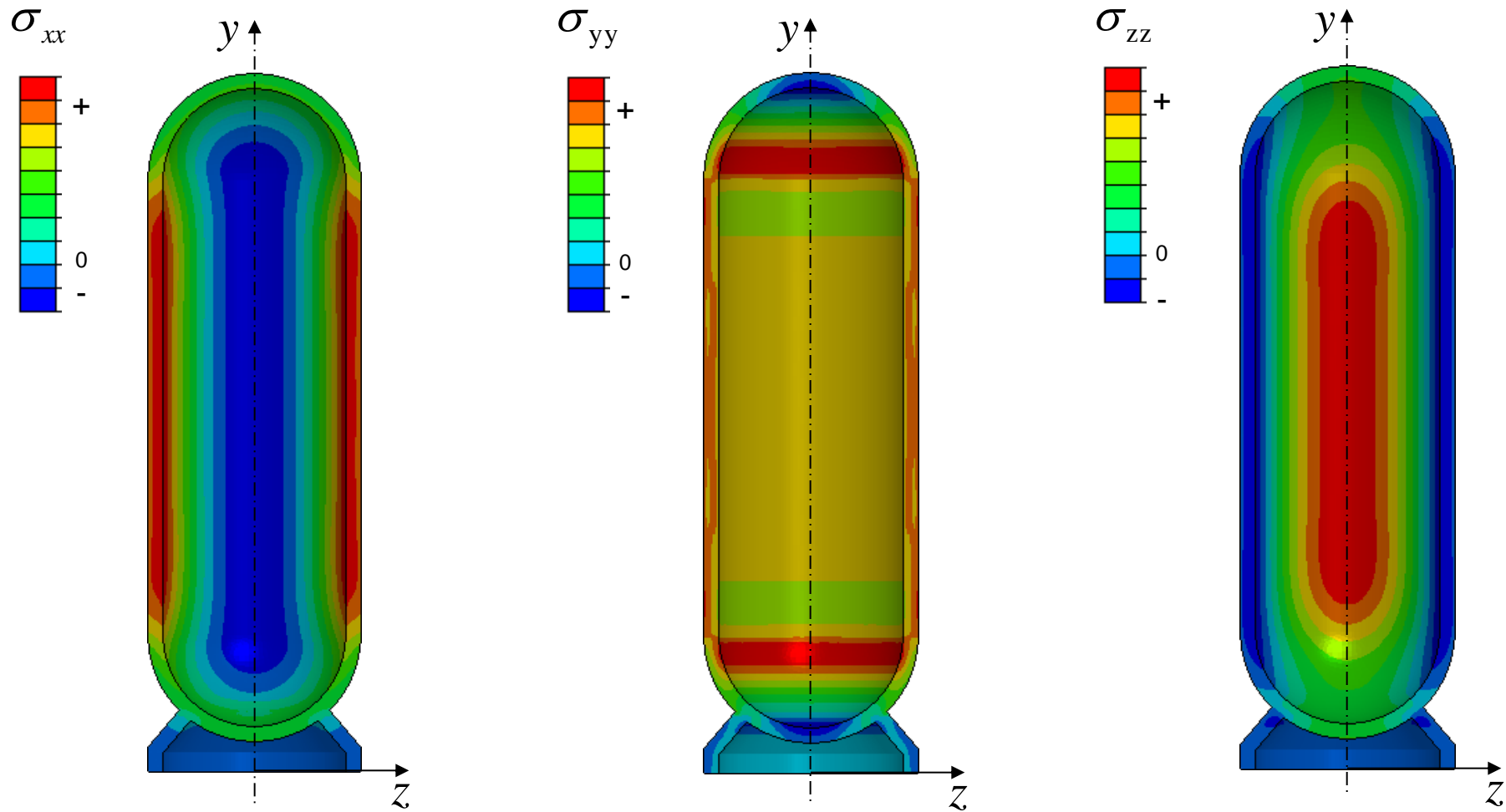
- deformacije v Kartezijevem koordinatnem sistemu



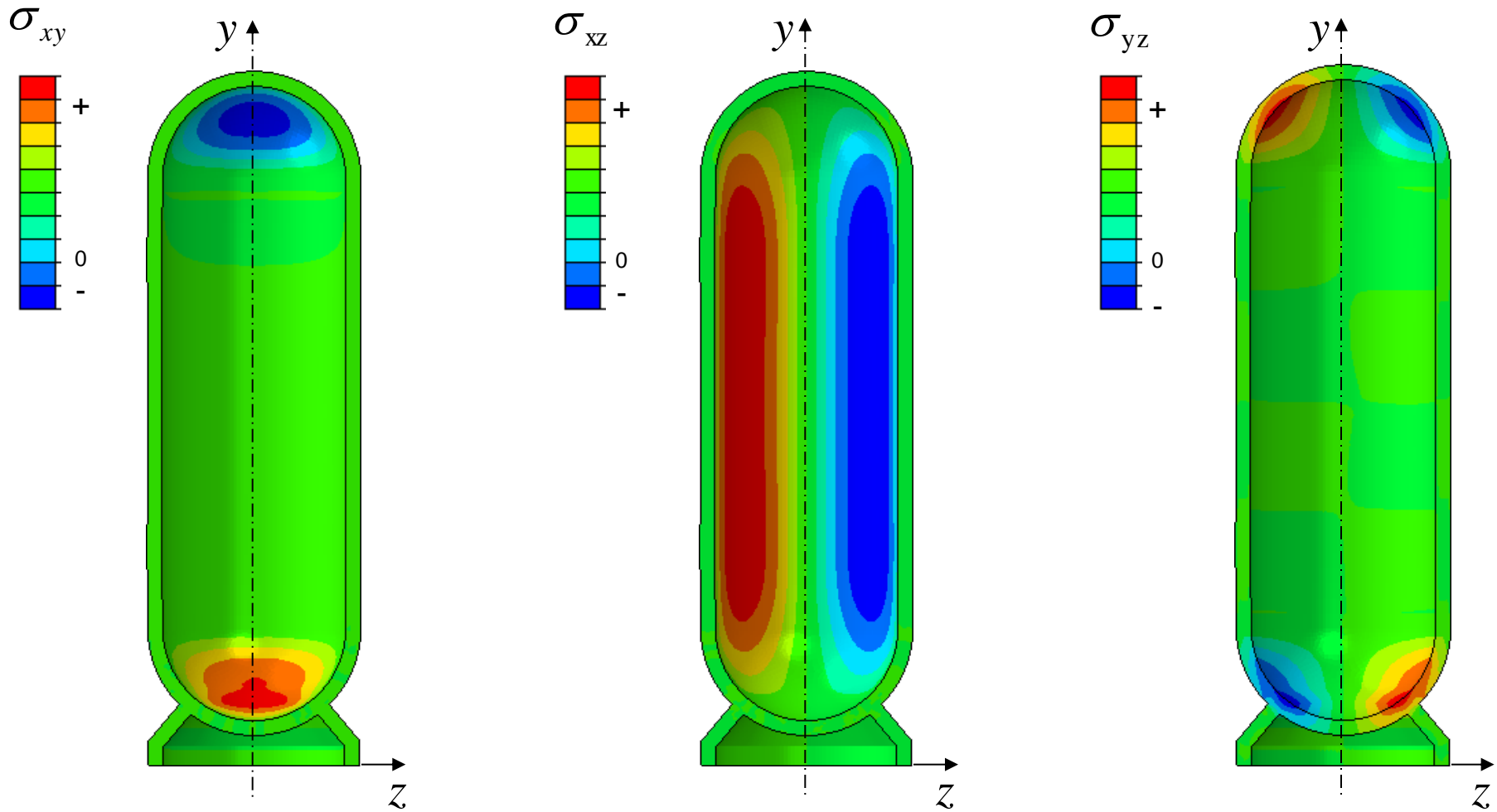
- deformacije v Kartezijevem koordinatnem sistemu



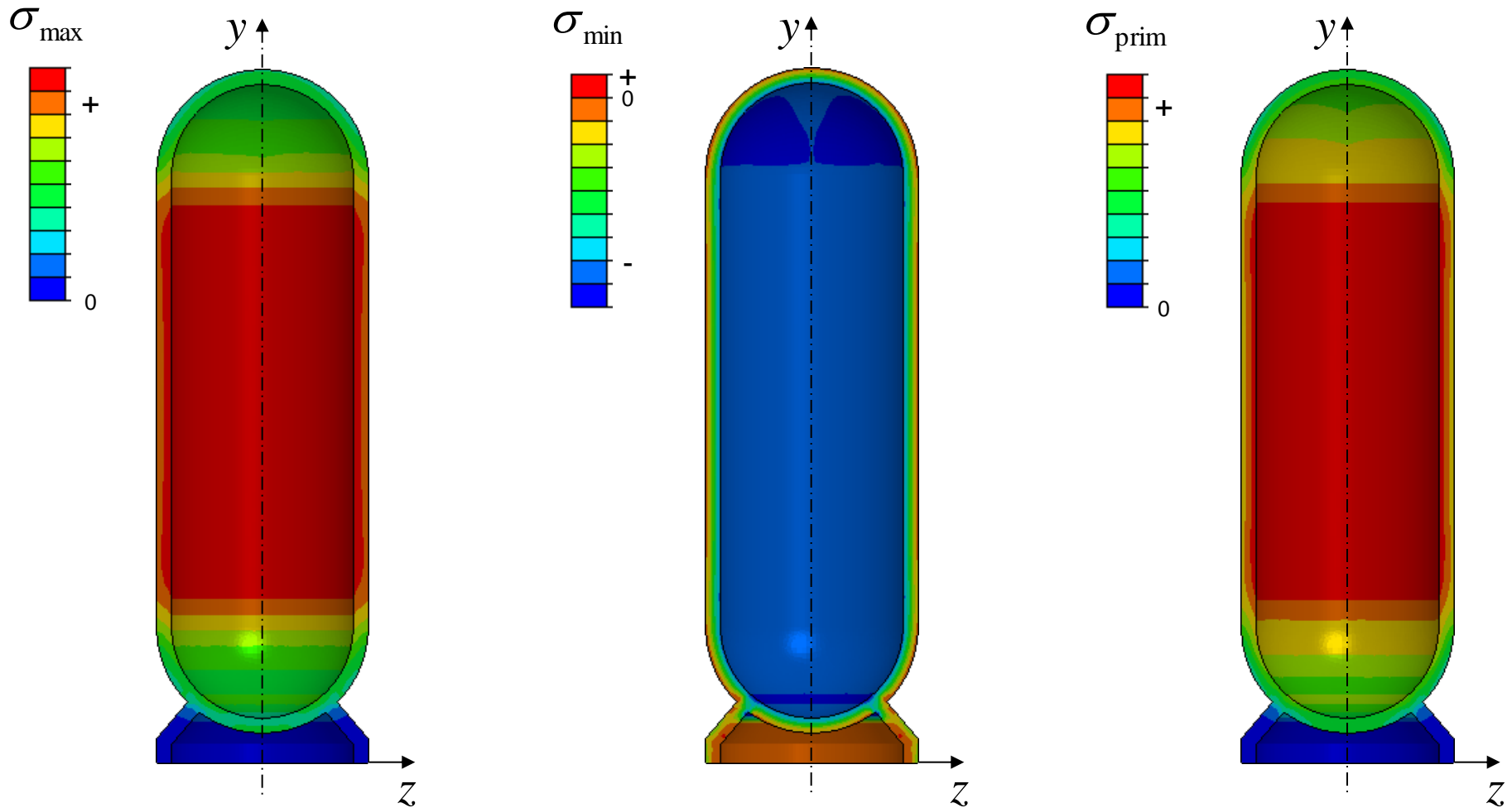
- napetosti v Kartezijevem koordinatnem sistemu



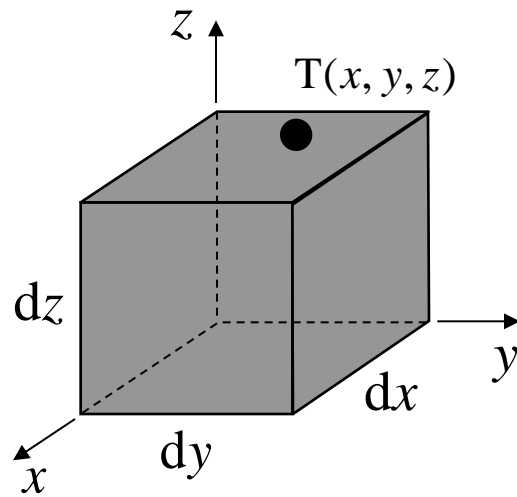
- napetosti v Kartezijevem koordinatnem sistemu



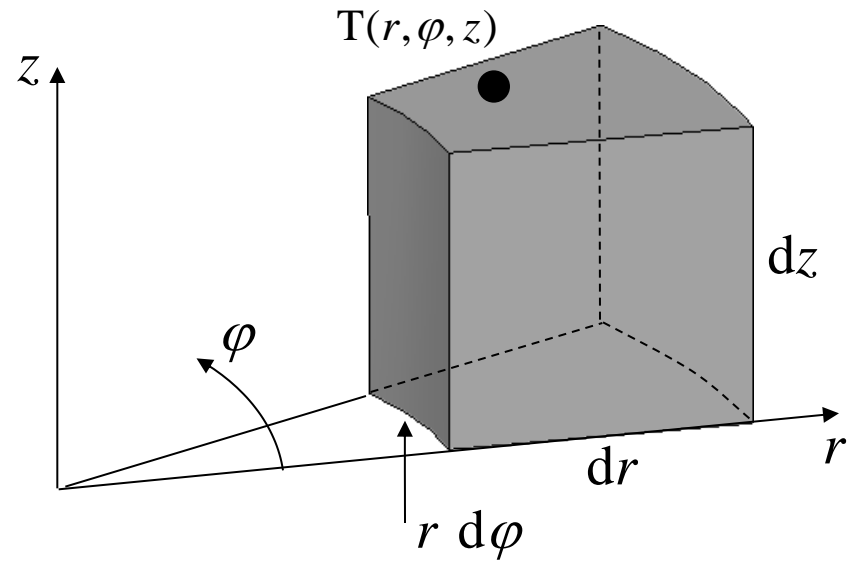
- glavne napetosti in primerjalna napetost v Kartezijevem koordinatnem sistemu



Kartezijev koordinatni sistem



cilindrični koordinatni sistem



- za homogeni, izotropni, linearno elastični material, zvezo med napetostmi in deformacijami, podanimi v cilindričnem koordinatnem sistemu, zapišemo s Hookovim zakonom na sledeči način:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu\varepsilon_{zz}]$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{rr} + (1-\nu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu\varepsilon_{zz}]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi} + (1-\nu)\varepsilon_{zz}]$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{r\varphi}$$

$$\sigma_{rz} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{rz}$$

$$\sigma_{\varphi z} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{\varphi z}$$

- komponente deformacijskega tenzorja lahko v cilindričnem koordinatnem sistemu zapišemo v odvisnosti od pomikov v obravnavanem območju

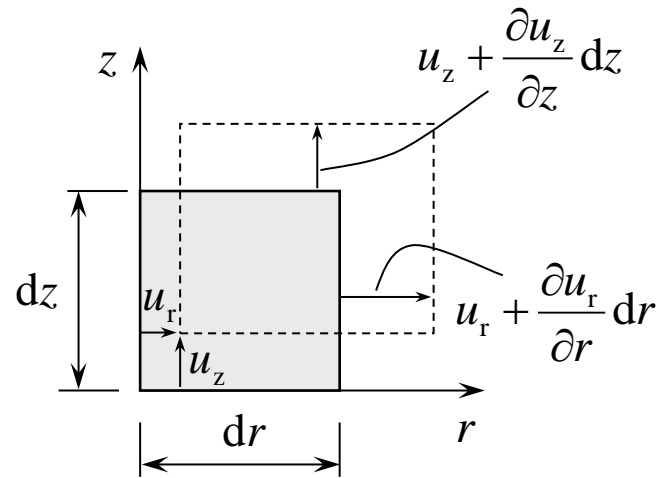
$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & , \quad \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} & , \quad \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & , \quad \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{r\varphi} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\varphi z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ u_z \end{Bmatrix}$$

- zveza med pomiki in deformacijami v cilindričnem koordinatnem sistemu

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\left(u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} dr \right) - u_r}{dr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

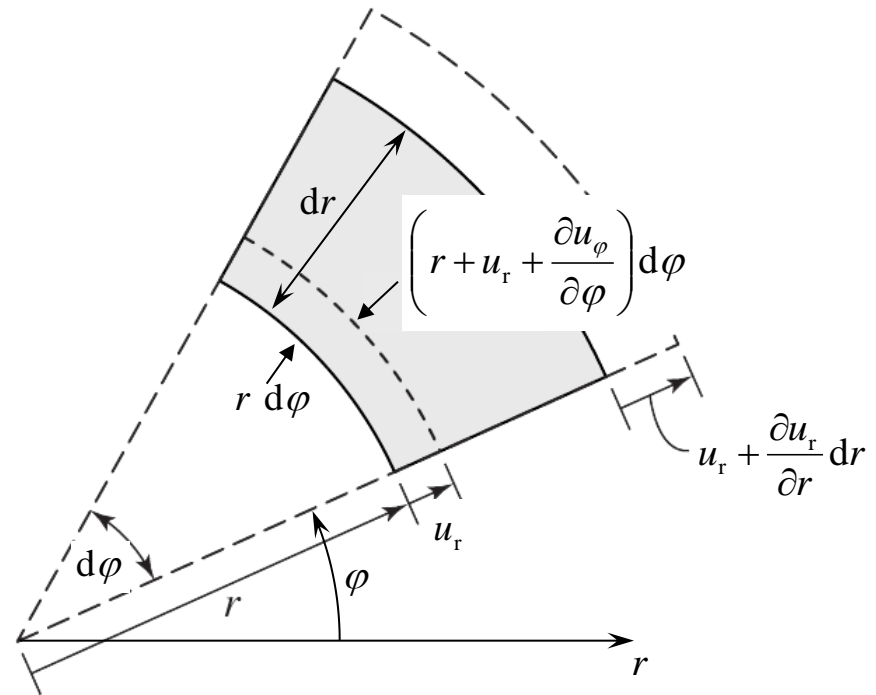
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\left(u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \right) - u_z}{dz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$



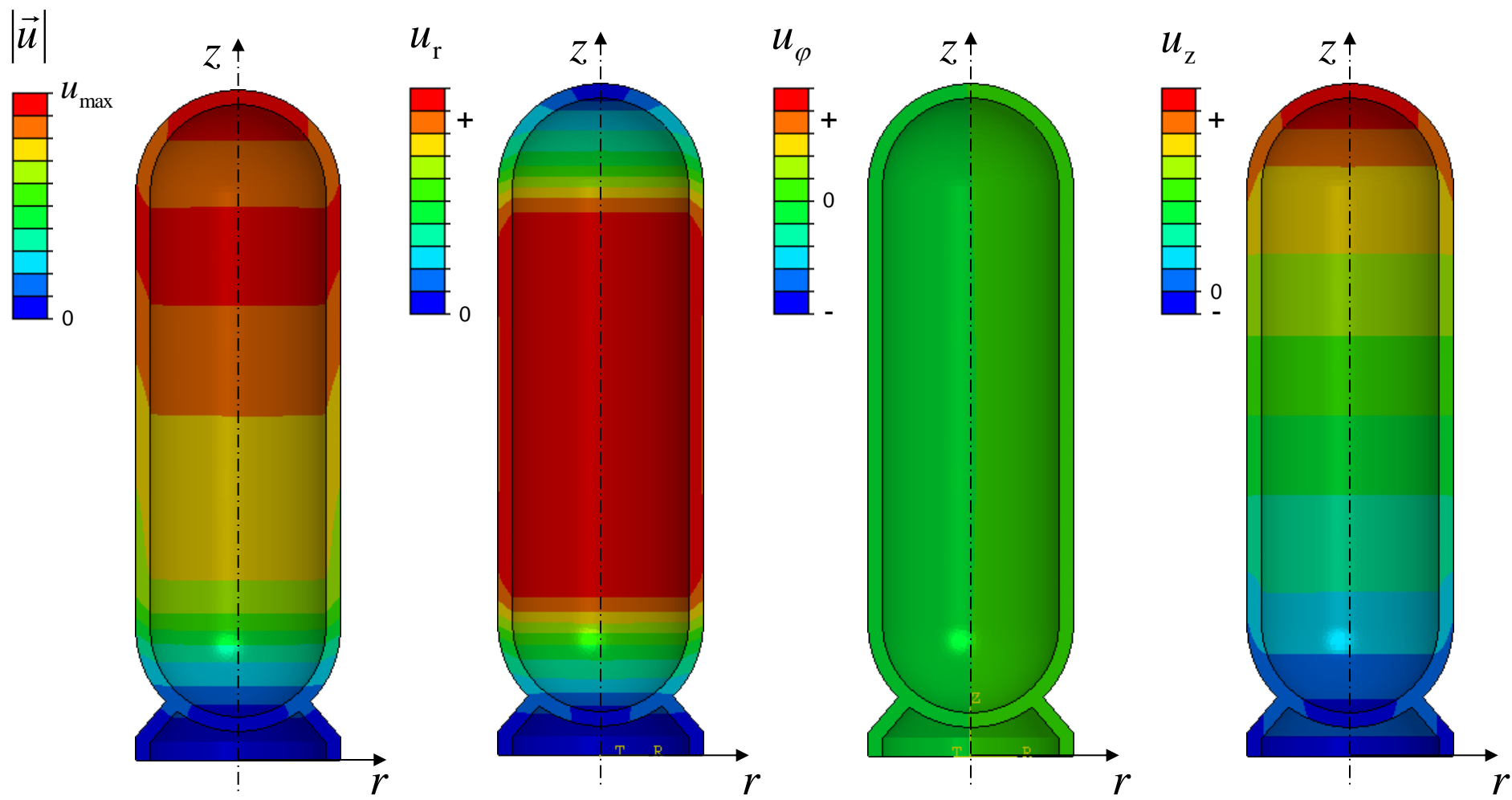
- zveza med pomiki in deformacijami v cilindričnem koordinatnem sistemu

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{\left(r + u_r + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) d\varphi - r d\varphi}{r d\varphi} =$$

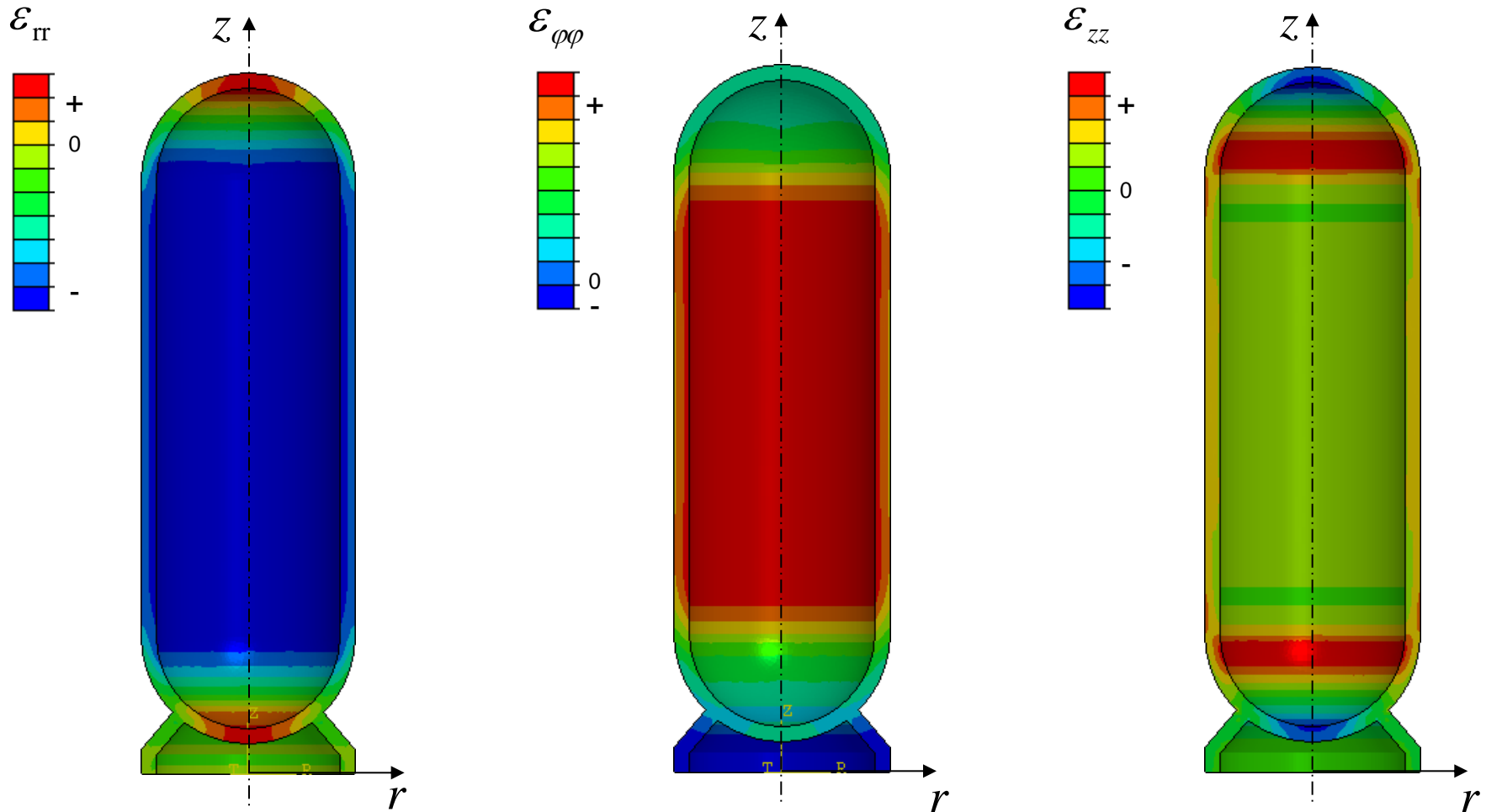
$$= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}$$



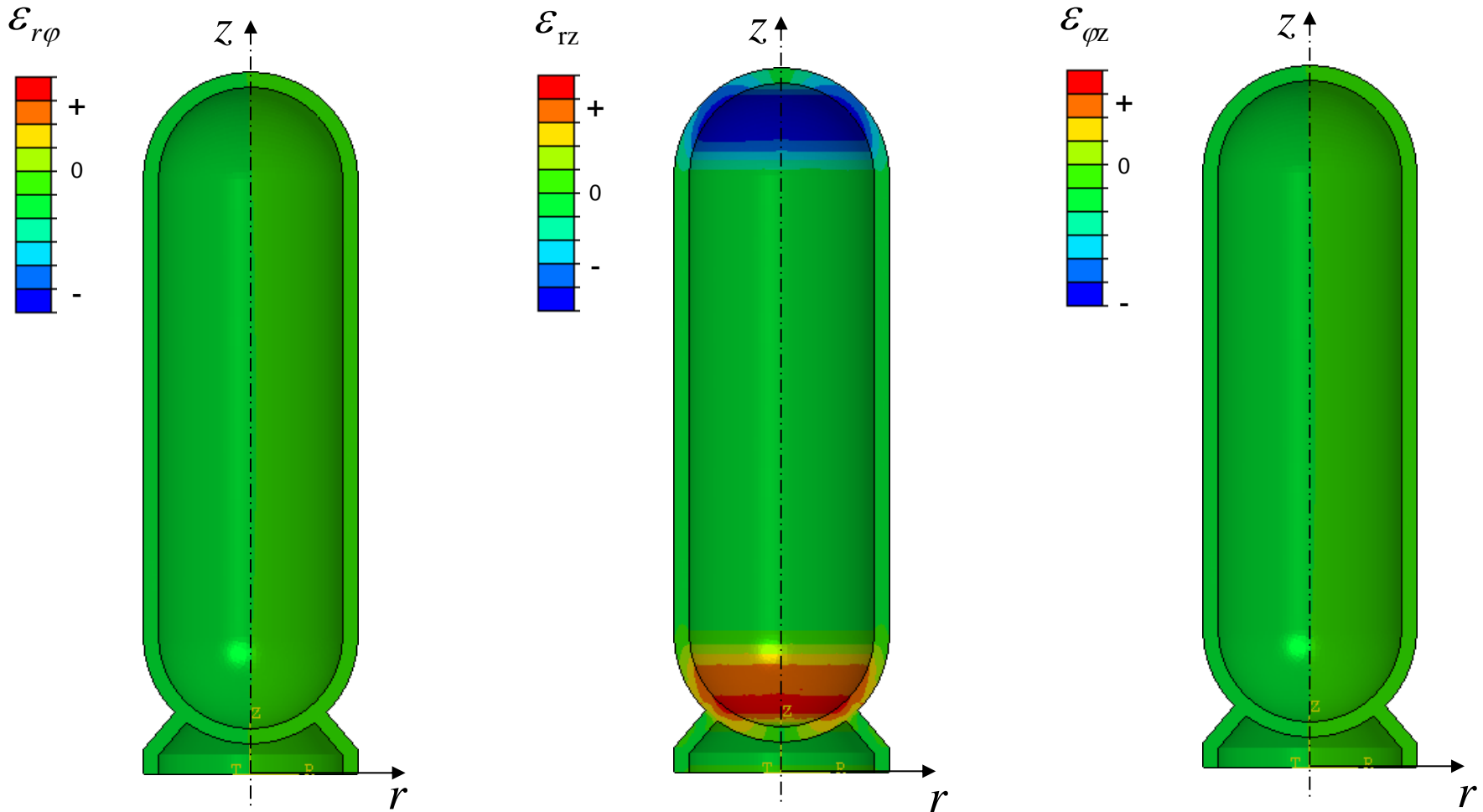
- pomiki v cilindričnem koordinatnem sistemu



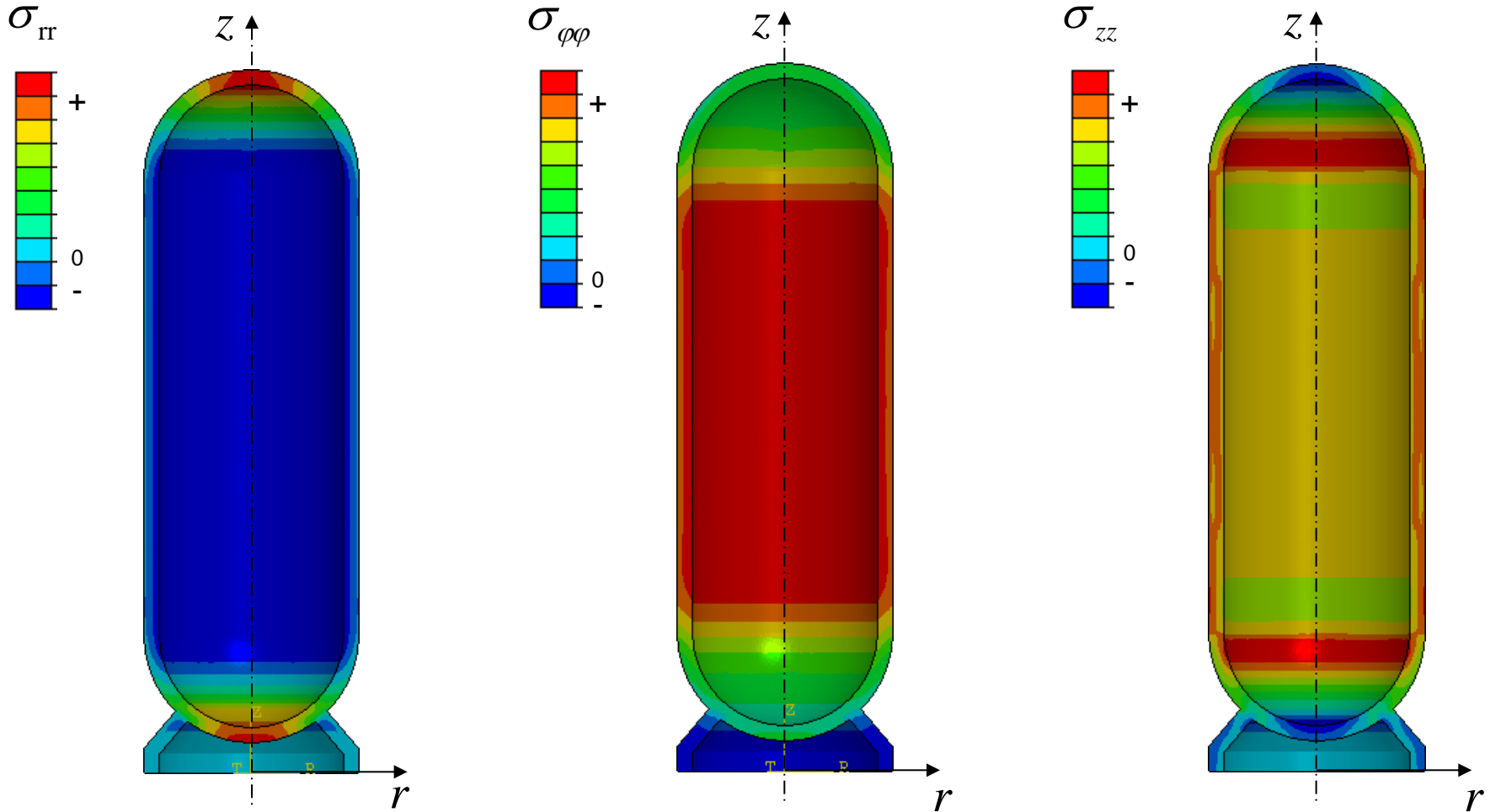
- deformacije v cilindričnem koordinatnem sistemu



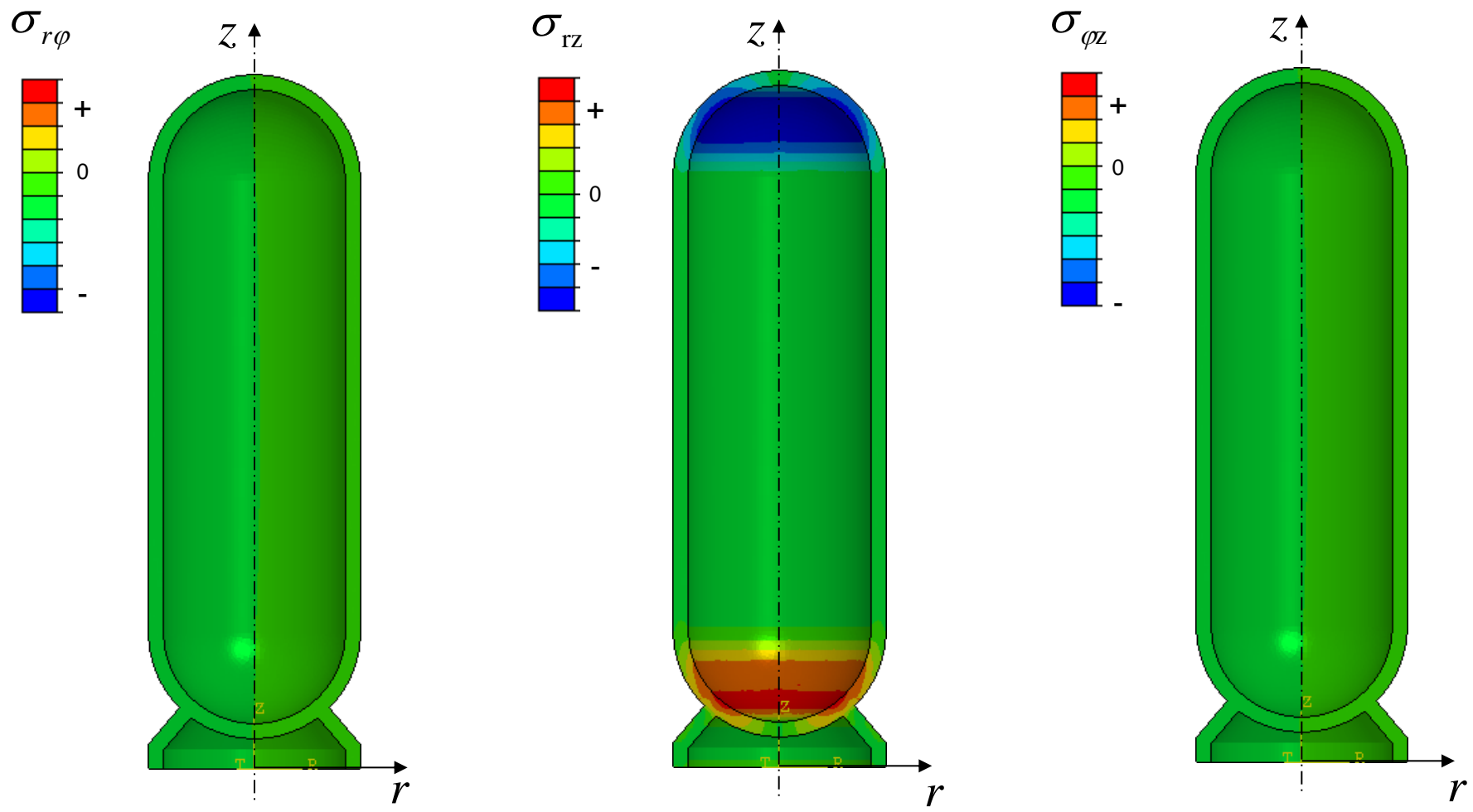
- deformacije v cilindričnem koordinatnem sistemu



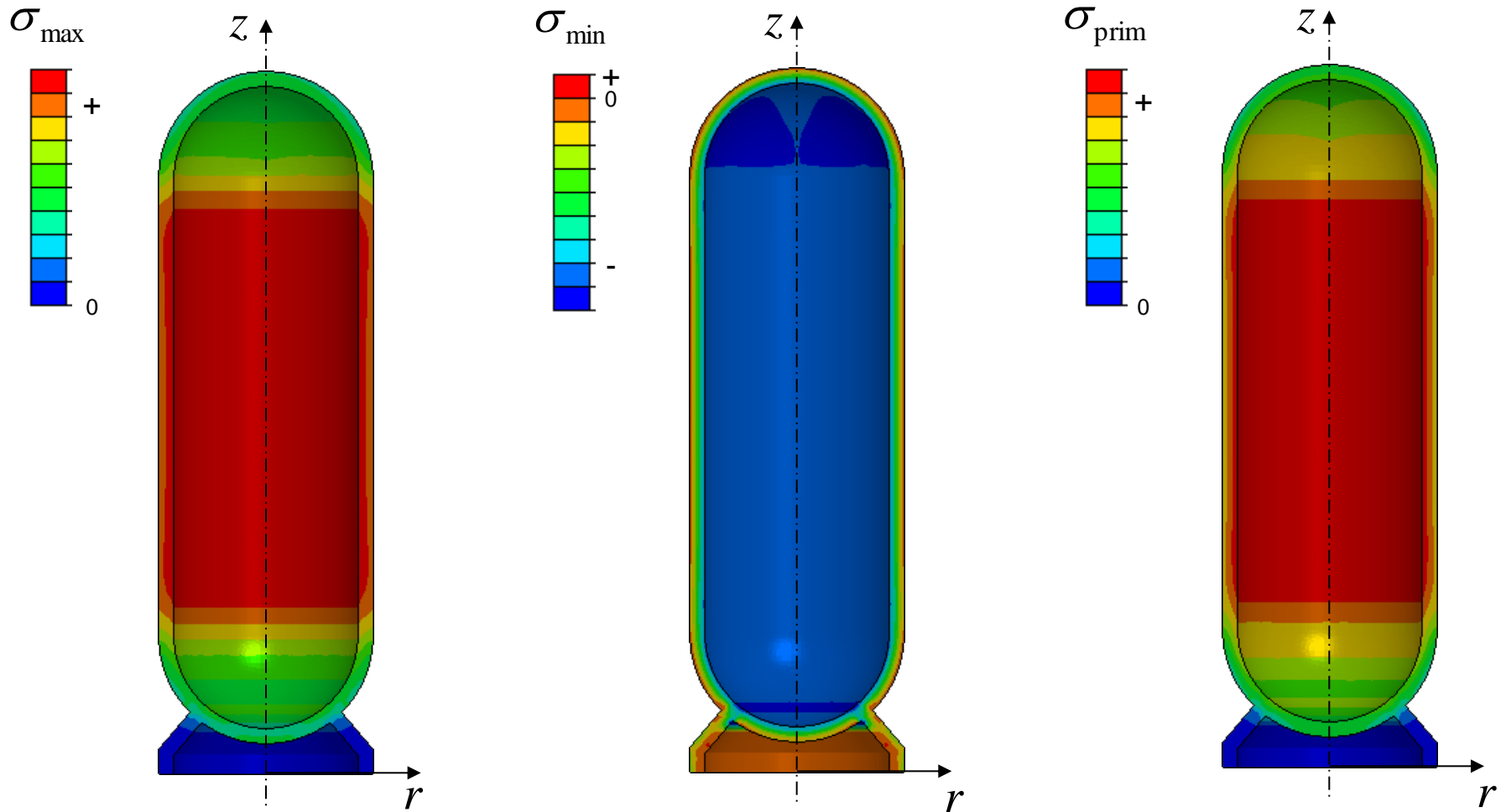
- napetosti v cilindričnem koordinatnem sistemu



- napetosti v cilindričnem koordinatnem sistemu



- glavne napetosti in primerjalna napetost v cilindričnem koordinatnem sistemu



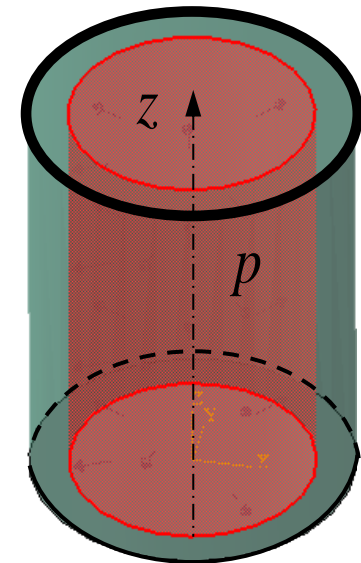
- kdaj lahko mehanski problem obravnavamo kot osno-simetrični?
- da lahko problem obravnavamo kot osno-simetrični problem (privzemimo da je os simetrije "z" koordinatna os) morajo biti osno-simetrični:

1) geometrija obravnavanega območja

2) materialne lastnosti

3) predpisani robni pogoji

4) obremenitev obravnavanega območja





- komponente deformacijskega tenzorja lahko v cilindričnem koordinatnem sistemu zapišemo v odvisnosti od pomikov v obravnavanem območju, upoštevajoč osno-simetričnost deformacijsko-napetostnega stanja

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{r\varphi} &= 0 \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{\varphi z} &= 0\end{aligned}$$

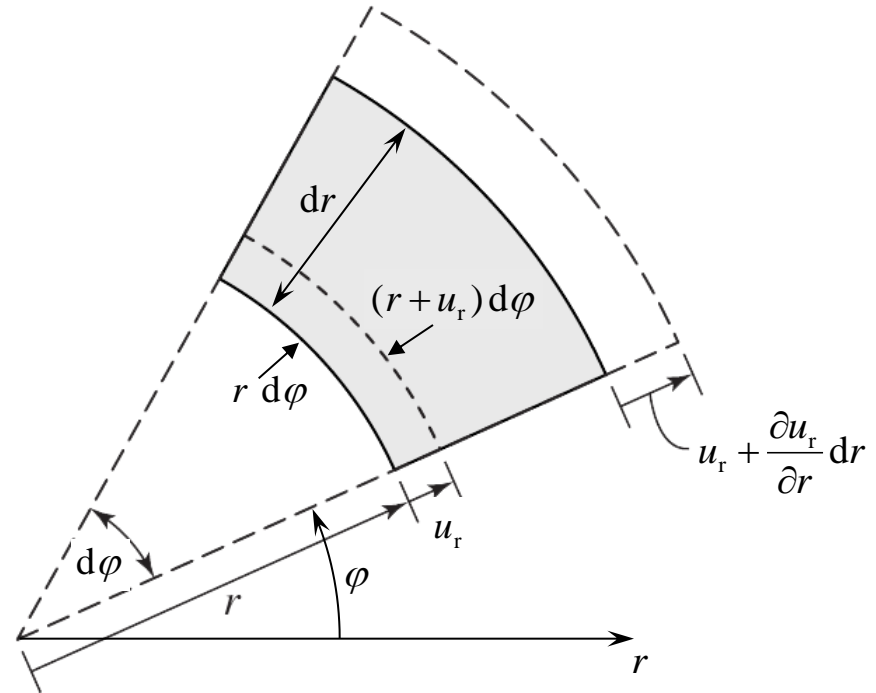
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{rr} \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} \quad \varepsilon_{zz} \quad 0 \quad \varepsilon_{rz} \quad 0\}^T$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{rr} \quad \sigma_{\varphi\varphi} \quad \sigma_{zz} \quad 0 \quad \sigma_{rz} \quad 0\}^T$$

- zveza med radialnim pomikom in obodnimi deformacijami v cilindričnem koordinatnem sistemu upoštevajoč osno-simetričnost deformacijskega stanja

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{(r + u_r) d\varphi - r d\varphi}{r d\varphi} = \frac{u_r}{r}$$

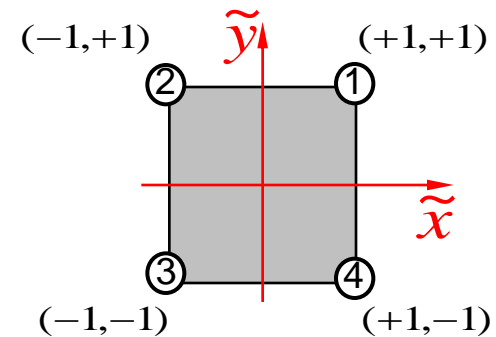
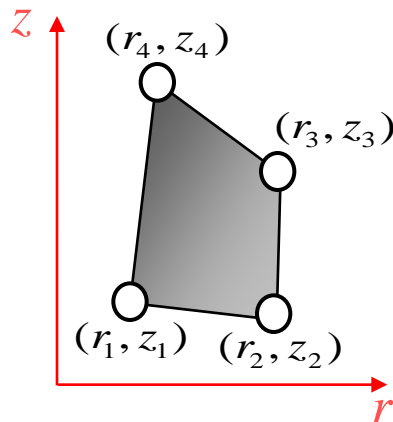


• izoparametrični 2D KE

• interpolacija geometrije KE

$$r = r(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{j=1}^{N_v} r_j \tilde{\psi}_j(\tilde{x}, \tilde{y})$$

$$z = z(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{j=1}^{N_v} z_j \tilde{\psi}_j(\tilde{x}, \tilde{y})$$

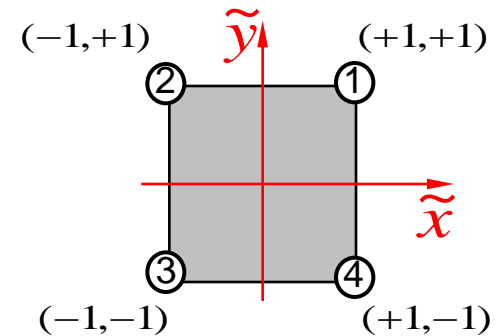
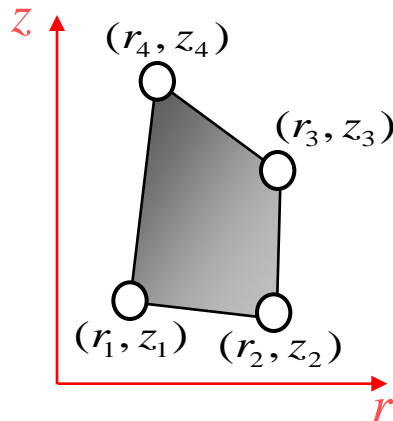


- interpolacija polja pomikov po območju KE

$$\{u\}_e = \{u_r, u_z\}^T$$

$$u_r(r, z) \approx \hat{u}_r(r, z) = \tilde{u}_r(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{j=1}^{N_v} U_j^r \tilde{\psi}_j(\tilde{x}, \tilde{y}) = \{U^r\} \{\tilde{\psi}\}$$

$$u_z(r, z) \approx \hat{u}_z(r, z) = \tilde{u}_z(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{j=1}^{N_v} U_j^z \tilde{\psi}_j(\tilde{x}, \tilde{y}) = \{U^z\} \{\tilde{\psi}\}$$



- matrični zapis enačbe KE za linearno elastični statično obremenjeni problem

- za posamezni KE dobimo toliko enačb, kolikor ima KE prostostnih stopenj
- v vozlišču KE sta neznani dve primarni veličini – pomika, tako da ima posamezni KE $(2 \cdot N_v)$ prostostnih stopenj

$$[K]_e \{U\}_e = \{F\}_e$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1(2N_v)} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2(2N_v)} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3(2N_v)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{(2N_v)1} & K_{(2N_v)2} & K_{(2N_v)3} & \cdots & K_{(2N_v)(2N_v)} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} U_{1r} \\ U_{1z} \\ U_{2r} \\ \vdots \\ U_{(2N_v)z} \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_{1r} \\ F_{1z} \\ F_{2r} \\ \vdots \\ F_{(2N_v)z} \end{Bmatrix}_e$$

- togostna matrika $[K]_e$ se izračuna na sledeči način

$$[K]_e = \int_{\Omega_e} ([L][N])^T [E] ([L][N]) 2\pi r d\Omega$$

- posamezni element vektorja $\{F\}_e$ predstavlja v vozlišču KE delujočo vektorsko komponento sile v smeri določene koordinatne osi
- v primeru, da je velikost vektorske osno-simetrične komponente pomika v smeri določene koordinatne osi v vozlišču KE poznana, velikost osno-simetrično porazdeljene točkovne mehanske obremenitve v tej smeri ni poznana

$$U_{ik} = \checkmark \Rightarrow F_{ik} = ? , \quad i = 1, \dots, N_v , \quad k = r, z$$

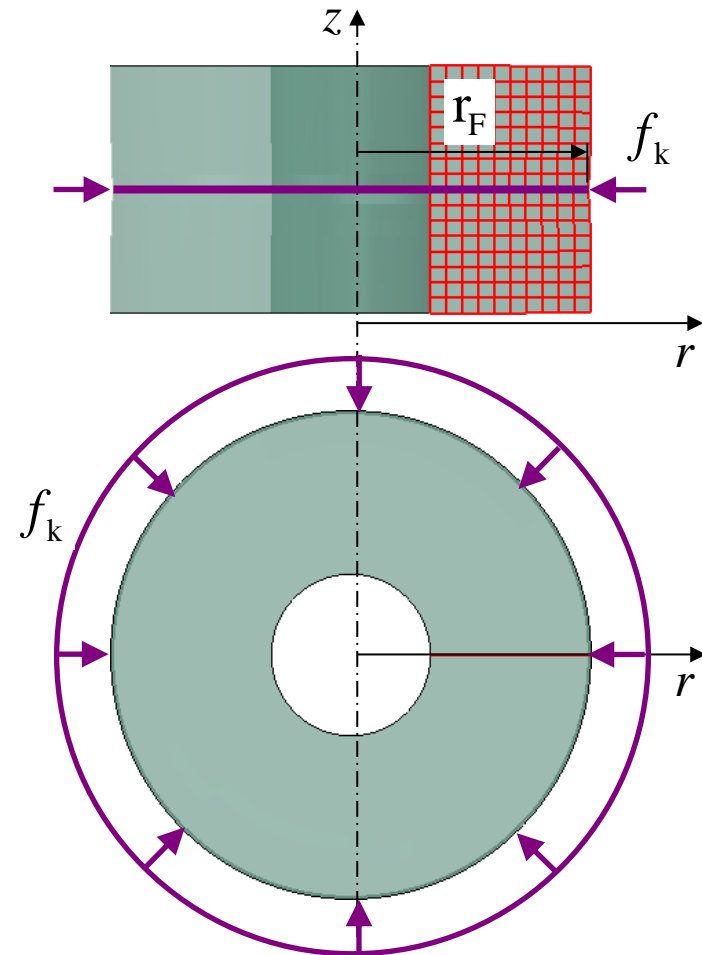
- pomik je lahko poznan samo v vozlišču KE, ki leži na ograji obravnavanega območja

- velikost osno-simetrično porazdeljene točkovne obremenitve F_k predstavlja celotno silo na določenem radiju

$$F_k = 2\pi r_F f_k, \quad k = r, z$$

$$F_k \text{ [N]}$$

$$f_k \text{ [N/m]}$$





- v primeru, da velikost vektorske osno-simetrične komponente pomika v smeri določene koordinatne osi v vozlišču KE ni poznana, je velikost osno-simetrično točkovno porazdeljene mehanske obremenitve v tej smeri možno izračunati

$$U_{ik} = ? \quad \Rightarrow \quad F_{ik} = \checkmark, \quad i = 1, \dots, N_v, \quad k = r, z$$

- v primeru osno-simetrične točkovne mehanske obremenitve na ograji obravnavanega območja, mrežo KE generiramo tako, da točka, v kateri deluje osno-simetrična točkovna obremenitev, sovpada z vozliščem KE

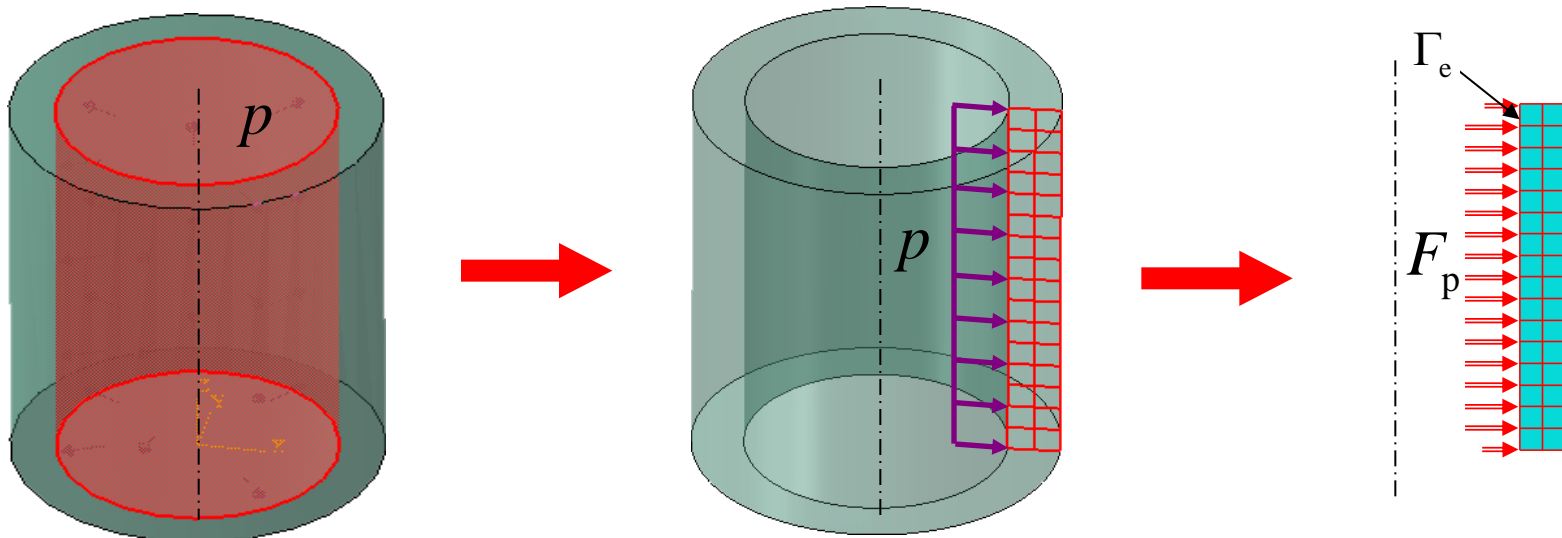
$$F_{Ik} = F_{Tk}, \quad I = \{1, \dots, N_{KE}\}, \quad k = r, z$$

- osno-simetrična točkovna obremenitev:
 - je vezana na vozlišče mreže KE in ne na posamezni KE
 - predstavlja celotno obremenitev na določenem radiju

- v primeru ploskovno porazdeljene mehanske obremenitve na ograji obravnavanega območja, izračunamo ekvivalentne vozliščne sile za posamezni KE

$$\{F_p\}_e = \int_{\Gamma_e} p [N]^T 2\pi r \, d\Gamma$$

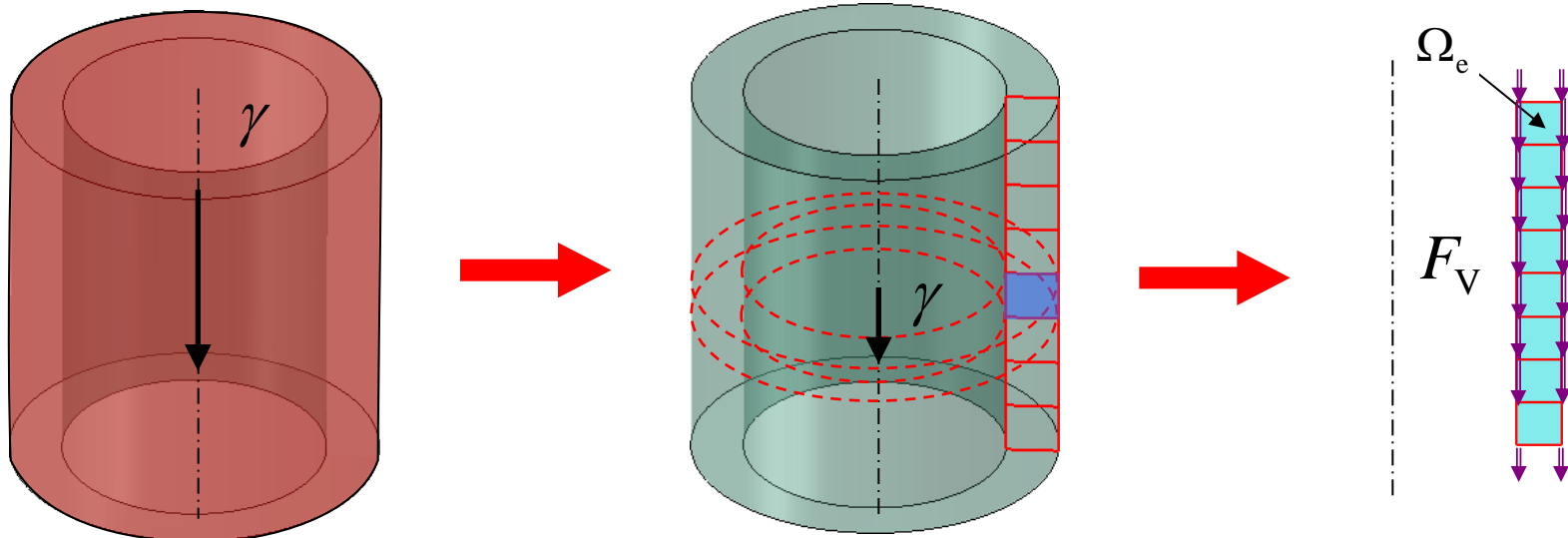
- izračun ekvivalentnih vozliščnih sil je vezan na površino, ki jo dobimo z vrtenjem robu Γ_e posameznega KE okoli osi, ki predstavlja osno simetrijo



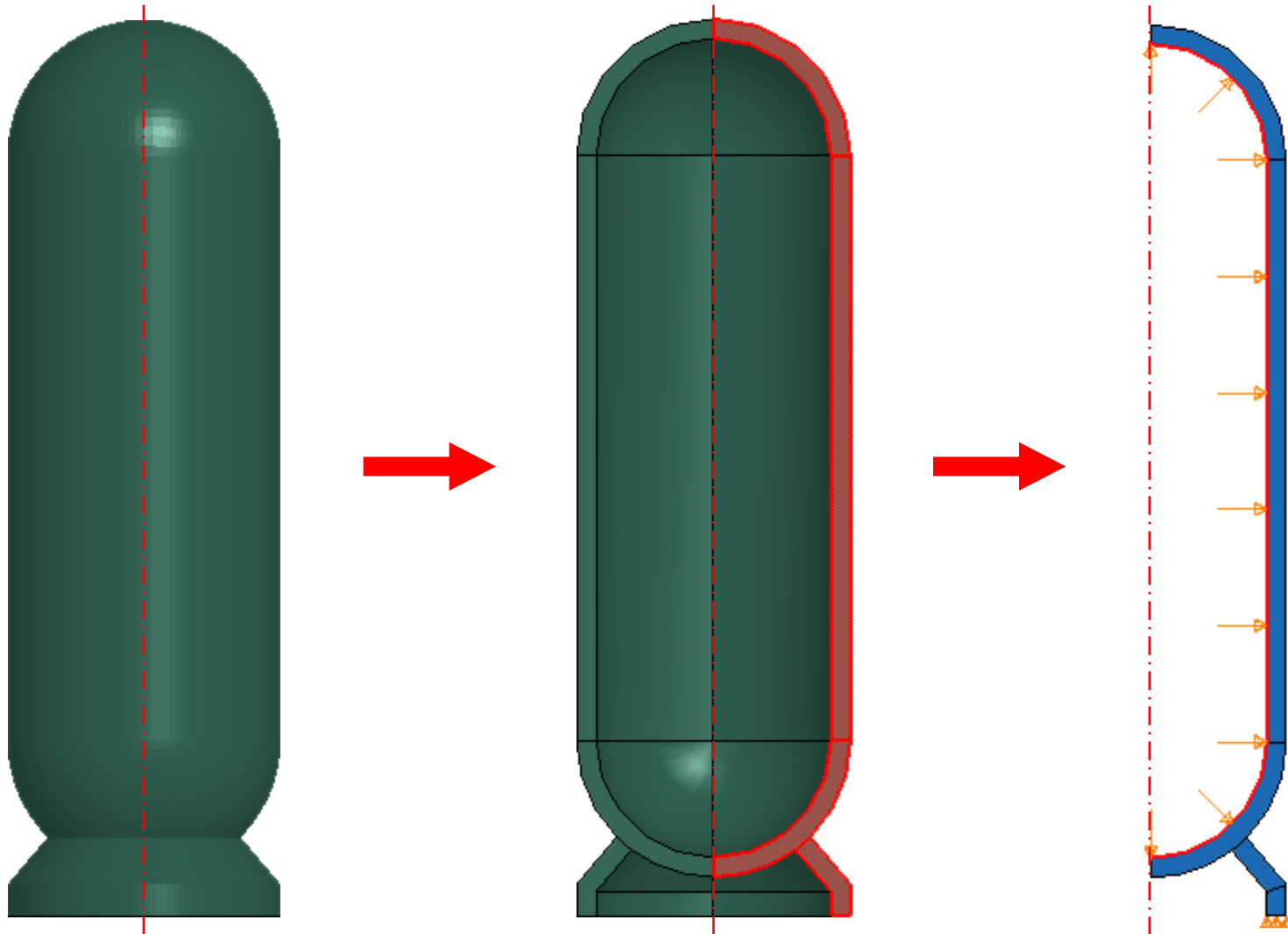
- v primeru volumsko porazdeljene mehanske obremenitve izračunamo ekvivalentne vozliščne sile za posamezni KE

$$\{F_V\}_e = \int_{\Omega_e} \rho_k a_k [N]^T 2\pi r d\Omega = \int_{\Omega_e} \gamma [N]^T 2\pi r d\Omega$$

- izračun ekvivalentnih vozliščnih sil je vezan na vrtenino, ki jo dobimo z vrtenjem površine posameznega KE okoli osi, ki predstavlja osno simetrijo



- primer reševanja osno-simetričnega volumskega mehanskega problema z MKE



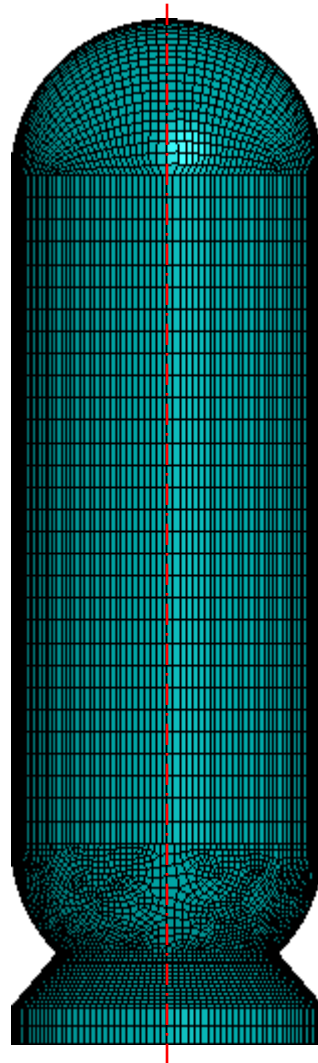
- primer reševanja osno-simetričnega volumskega mehanskega problema z MKE

3D KE:

53000 KE (6 pl., 8 vozl.)

66500 vozlišč

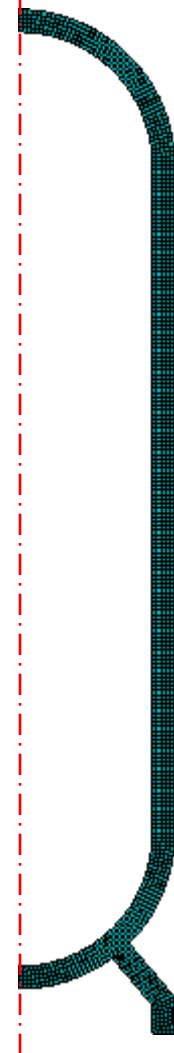
200000 enačb

**2D osno-sim. KE:**

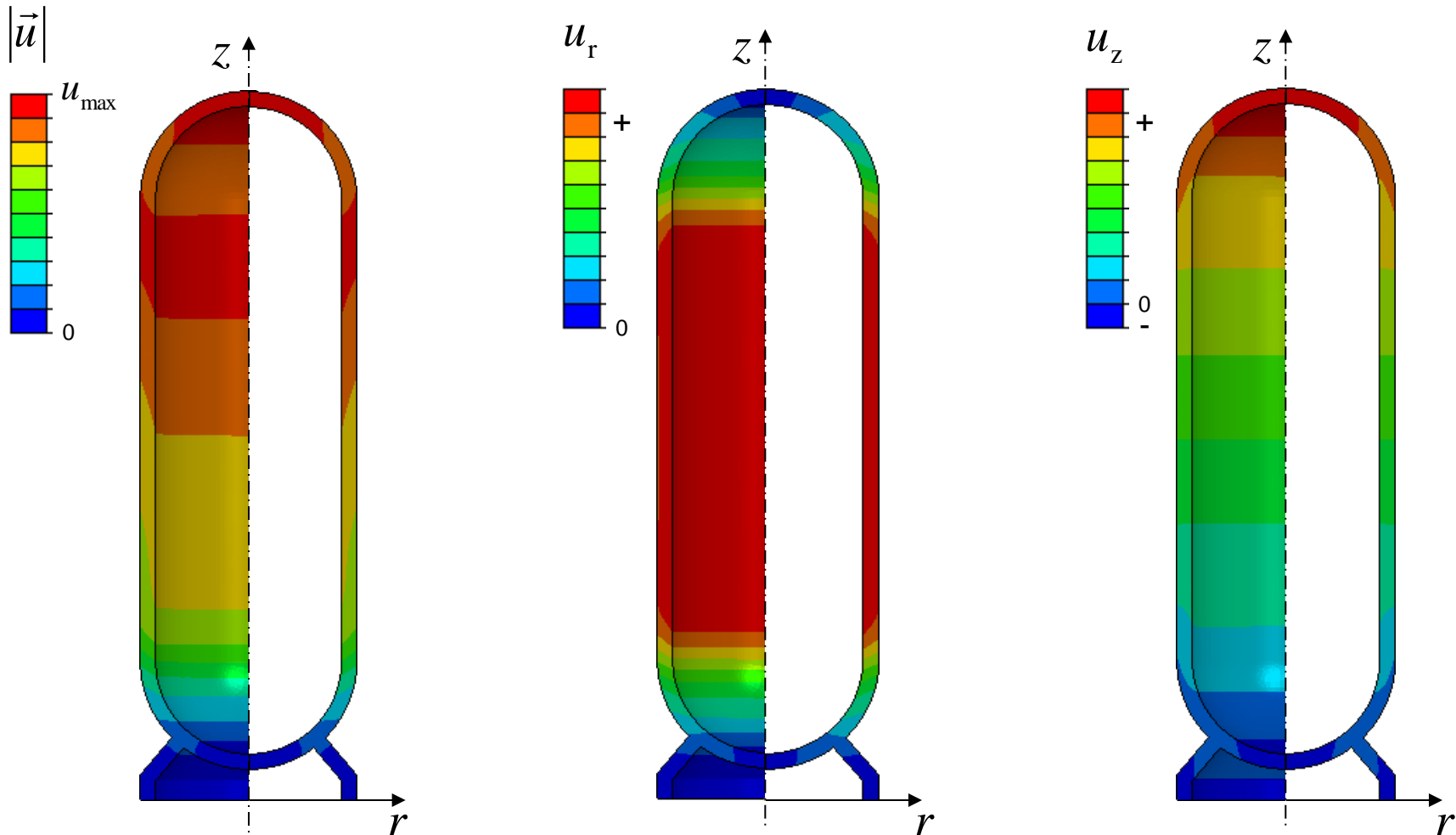
1400 KE (4 str., 4 vozl.)

1700 vozlišč

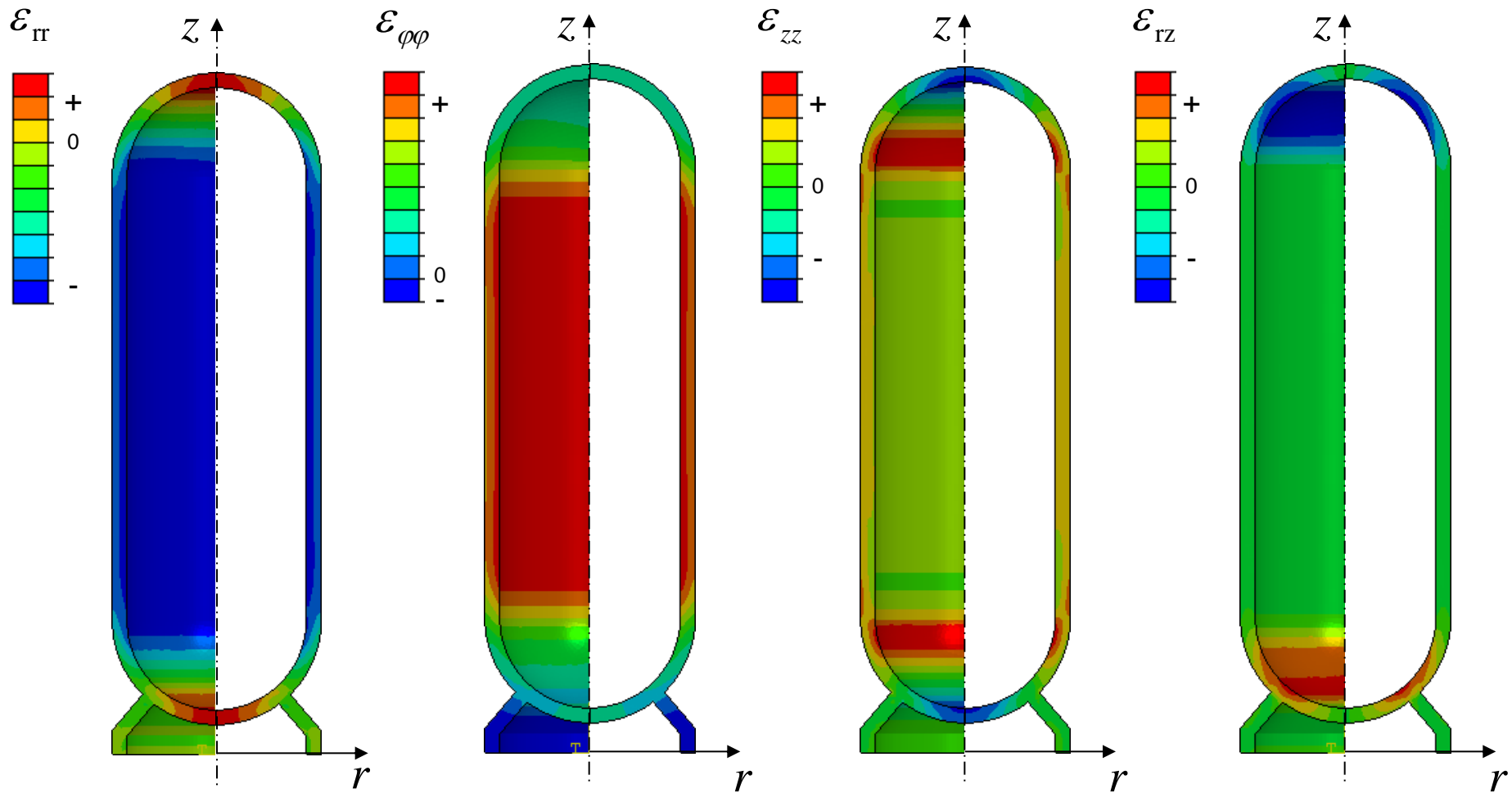
3400 enačb



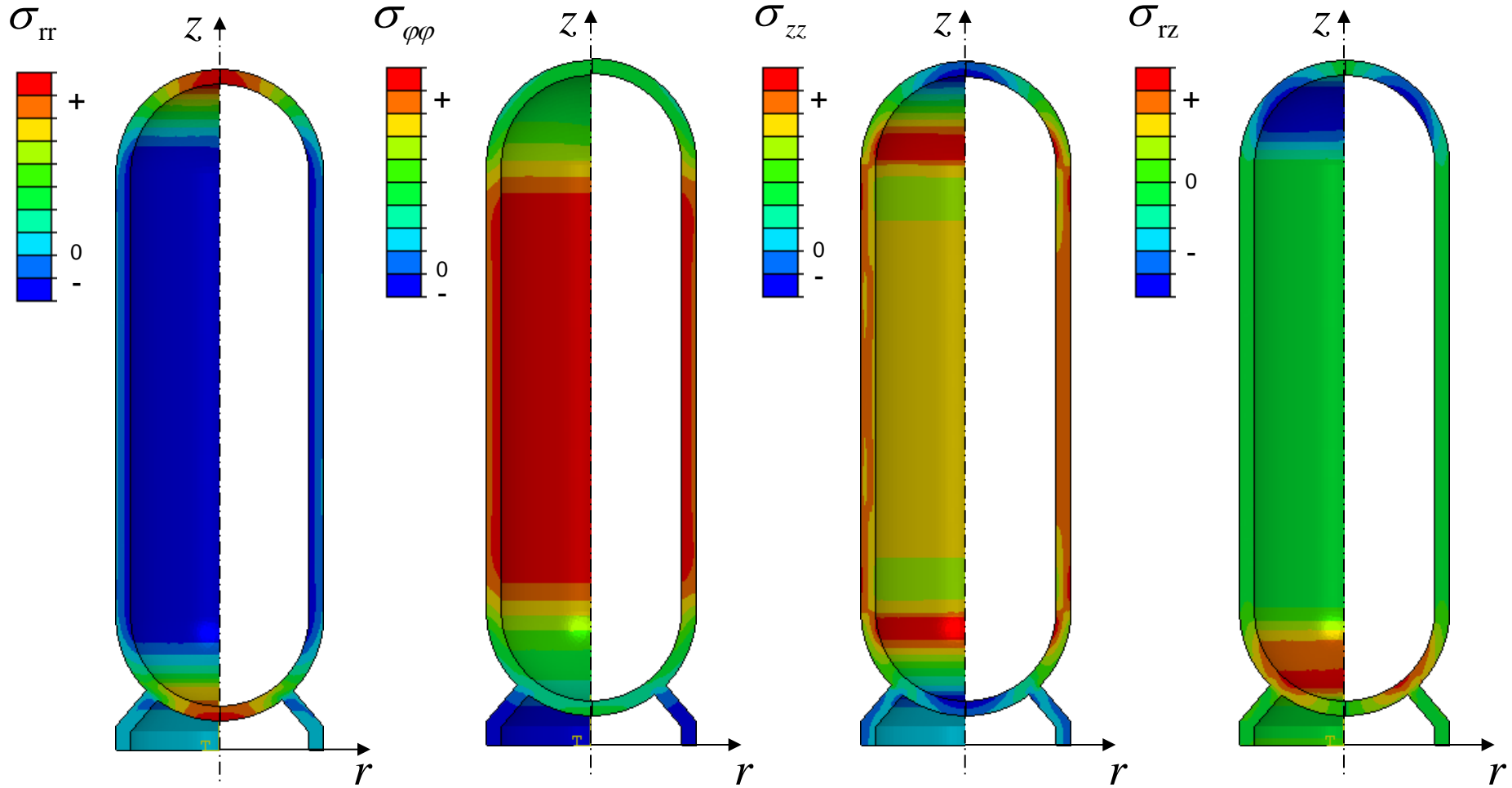
- primerjava pomikov: 3D KE ↔ 2D osno-sim. KE



- primerjava deformacij: 3D KE \longleftrightarrow 2D osno-sim. KE



- primerjava napetosti: 3D KE \longleftrightarrow 2D osno-sim. KE



- primerjava glavnih napetosti in primerjalne napetosti:

3D KE \longleftrightarrow 2D osno-sim. KE

